1. «Dinámica de una partícula y de un sistema de partículas»

1.1 Dinámica de una partícula

1.1.1 Repaso de conceptos de cinemática:

La **cinemática** del movimiento es la formulación de la ley del movimiento de un cuerpo prescindiendo de las fuerzas que lo producen.

1.1.1.1 Sistema de referencia, reposo, movimiento, relatividad del movimiento

- **Sistema de referencia:** El llamado sistema de referencia está formado por el cuerpo de referencia, las coordenadas y los relojes sincronizados entre sí y ligados con él.
- **Concepto de reposo**: Si las coordenadas de todos los puntos del cuerpo en el sistema de referencia elegido permanecen constantes, entonces el cuerpo está en reposo respecto de este sistema de referencia.

- **Concepto de movimiento**: Si las coordenadas de algunos puntos del cuerpo se modifican en el tiempo, el cuerpo está en movimiento respecto del sistema de referencia dado.
- **Relatividad del movimiento**: Tanto el reposo como el movimiento son conceptos relativos, es decir, dependen del sistema de referencia.

1.1.1.2 Vector de posición. Vector desplazamiento

Vector de posición

El vector de posición de una partícula situada en un punto $P_1(x_1;y_1)$ del sistema cartesiano OXY se representa por la expresión $\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} = r_{1x}\vec{i} + r_{1y}\vec{j}$.

El vector de posición $\vec{r}$ se relaciona con la **trayectoria s** que a su vez depende del tiempo: $\vec{r} = \vec{r}\left[s(t)\right]$.

Vector desplazamiento

Si la partícula se mueve, su vector de posición cambia, pero siempre va dirigido desde el origen O hasta el nuevo punto. Si se mueve desde el punto $P_1(x_1;y_1)$ hasta el punto $P_2(x_2;y_2)$ el vector desplazamiento es la diferencia entre los vectores de posición en dos instantes determinados:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \left(r_{2x}\vec{i} + r_{2y}\vec{j}\right) - \left(r_{1x}\vec{i} + r_{1y}\vec{j}\right) = \left(r_{2x} - r_{1x}\right)\vec{i} + \left(r_{2y} - r_{1y}\right)\vec{j} = \Delta r_x\vec{i} + \Delta r_y\vec{j}$$

1.1.1.3 Velocidad media. Velocidad instantánea

Velocidad media

La velocidad media de una partícula es la relación entre el vector desplazamiento y el tiempo transcurrido en dicho desplazamiento.

Si la trayectoria de la partícula es recta o si describe una trayectoria curvilínea. La velocidad media es un vector que tiene la misma dirección y sentido que el vector desplazamiento:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\left(r_{2x} - r_{1x}\right)\vec{i} + \left(r_{2y} - r_{1y}\right)\vec{j}}{t_2 - t_1}$$

Velocidad instantánea

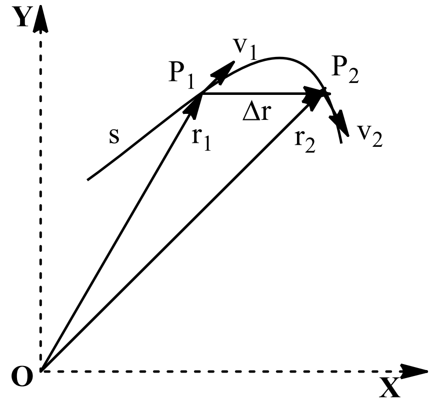
La velocidad del punto material en un instante dado es igual a la primera derivada del vector de posición del punto con relación al tiempo.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\vec{v}_m = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr_x}{dt}\vec{i} + \frac{dr_y}{dt}\vec{j}$$

Como el vector de posición se relaciona con la trayectoria s, que a su vez depende del tiempo, la velocidad instantánea también se expresa como el producto del módulo de la velocidad por el vector unitario que nos indica la dirección y sentido de la velocidad

$$\vec{r} = \vec{r}\left[s(t)\right] \quad\Rightarrow\quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \vec{u}_t\left|\vec{v}\right| \quad\Rightarrow\quad \left\{\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \vec{u}_t\right\} \quad\Rightarrow\quad \vec{v} = \left|\vec{v}\right|\vec{u}_t$$

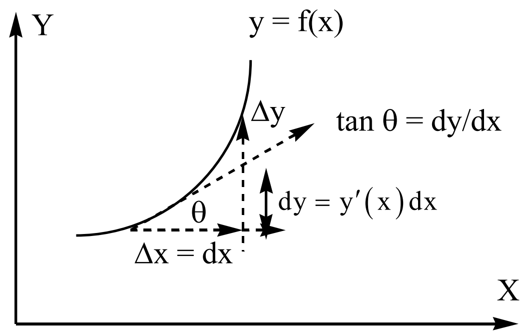
Por lo que el módulo de la velocidad es igual a: $\left|\vec{v}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right| = \frac{ds}{dt}$



$$\vec{r} = \vec{r}\left[s(t)\right]$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \vec{u}_t\,|\vec{v}| \quad \left\{\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \vec{u}_t\right\}$$

$$\vec{v} = |\vec{v}|\,\vec{u}_t$$



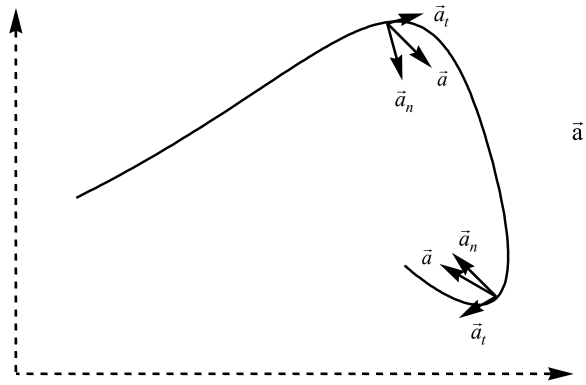
$$\left\{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x)\right\} \quad \left\{dy = y'(x)\,dx\right.$$

1.1.1.4 Aceleración media. Aceleración instantánea. Componentes intrínsecas de la aceleración

Aceleración media: La aceleración es una magnitud que nos mide la rapidez de cambio de la velocidad. La aceleración media, que posee un punto material, cuando éste cambia la velocidad instantánea en un intervalo de tiempo como la división entre el incremento del vector velocidad y el tiempo transcurrido en dicho incremento

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

Aceleración instantánea: Se llama aceleración del punto material a una magnitud vectorial que caracteriza el cambio con el tiempo del módulo y de la dirección de la velocidad del punto material. La aceleración del punto material en un instante dado es igual a la primera derivada de la velocidad o a la segunda derivada del vector de posición del punto material con relación al tiempo. *La aceleración instantánea, en un movimiento curvilíneo, siempre va dirigida hacia la concavidad de la trayectoria*.



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + v\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{R}\vec{u}_n = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

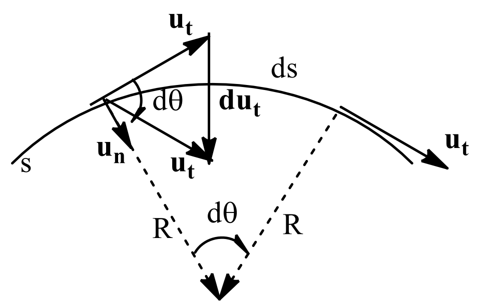
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{u}_t) = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + v\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{R}\vec{u}_n = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

<u>Componentes intrínsecas de la aceleración: aceleración tangencial y normal</u>

En un movimiento curvilíneo la aceleración instantánea siempre está dirigida hacia la concavidad de la curva, y se puede descomponer en dos componentes, llamadas componentes intrínsecas de la aceleración. Una componente es la tangente a la trayectoria y la otra la normal a la trayectoria dirigida hacia el centro de la curvatura.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \cdot \vec{u}_t) = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_t + v \cdot \frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_t + \frac{v^2}{R} \cdot \vec{u}_n = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

$$\vec{a}_n = v \cdot \frac{d\vec{u}_t}{dt} \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} ds = d\theta \cdot R \\ |d\vec{u}_t| = d\theta \cdot 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left| \dfrac{d\vec{u}_t}{dt} \right| = \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{R}\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{v}{R} \\ \vec{u}_t \perp \dfrac{d\vec{u}_t}{dt} = \vec{u}_n \quad \left\{ \vec{u}_t \cdot \vec{u}_t = 1 \Rightarrow \dfrac{d\vec{u}_t}{dt} \cdot \vec{u}_t + \vec{u}_t \cdot \dfrac{d\vec{u}_t}{dt} = 2\vec{u}_t \cdot \dfrac{d\vec{u}_t}{dt} = 0 \right\} \end{array} \right\} \quad \vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \cdot \vec{u}_n$$



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \cdot \vec{u}_t) = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_t + v \cdot \frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_t + \frac{v^2}{R} \cdot \vec{u}_n = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

$$\vec{a}_n = v \cdot \frac{d\vec{u}_t}{dt} \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} ds = d\theta \cdot R \\ |d\vec{u}_t| = d\theta \cdot 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left| \dfrac{d\vec{u}_t}{dt} \right| = \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{R}\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{v}{R} \\ \vec{u}_t \perp \dfrac{d\vec{u}_t}{dt} = \vec{u}_n \quad \left\{ \vec{u}_t \cdot \vec{u}_t = 1 \Rightarrow \dfrac{d\vec{u}_t}{dt} \cdot \vec{u}_t + \vec{u}_t \cdot \dfrac{d\vec{u}_t}{dt} = 2\vec{u}_t \cdot \dfrac{d\vec{u}_t}{dt} = 0 \right\} \end{array} \right\} \quad \vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \cdot \vec{u}_n$$

Significado físico de las componentes intrínsecas de la aceleración: a) *La aceleración tangencial nos mide los cambios en magnitud del módulo de la velocidad o celeridad*; b) *La aceleración normal nos mide los cambios en la dirección de la velocidad.*

Demostración**:** Consideremos una sección de la trayectoria curvilínea. En cada instante el vector velocidad es siempre tangente a la trayectoria y el vector aceleración está dirigido hacia la concavidad de la trayectoria. **a)** La aceleración mide la rapidez de los cambios de velocidad, es decir, los cambios de la celeridad o de la dirección de la velocidad o de los dos. **b)** La rapidez de cambio en el módulo de la velocidad (la celeridad) se denomina aceleración tangencial. **c)** La rapidez de cambio en la dirección del vector velocidad se denomina aceleración centrípeta o normal.

Demostración de que el vector resultante de la derivada del vector unitario tangente respecto del tiempo es perpendicular al propio vector unitario tangente:

$$\vec{a}_n = |\vec{v}|\frac{d\vec{u}_t}{dt} = |\vec{v}|\frac{d\vec{u}_t}{ds}\frac{ds}{dt} = |\vec{v}|^2\frac{d\vec{u}_t}{ds} = \frac{|\vec{v}|^2}{R}\vec{u}_n$$

$$\left\{ \vec{u}_t \cdot \vec{u}_t = 1 \;\Rightarrow\; \frac{d\vec{u}_t}{ds}\cdot\vec{u}_t + \vec{u}_t \cdot \frac{d\vec{u}_t}{ds} = 2\vec{u}_t \cdot \frac{d\vec{u}_t}{ds} = 0 \right\} \;\Rightarrow\; \vec{u}_t \perp \frac{d\vec{u}_t}{ds}$$

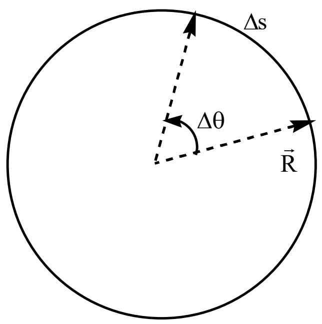
$$\frac{d\vec{u}_t}{ds} = \left|\frac{d\vec{u}_t}{ds}\right|\vec{u}_n = \frac{1}{R}\vec{u}_n \qquad \left\{ \begin{array}{l} |d\vec{u}_t| = d\theta \\ ds = d\theta \cdot R \end{array} \right\} \;\Rightarrow\; \left\{ \left|\frac{d\vec{u}_t}{ds}\right| = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R} \right\}$$

1.1.1.5 Movimiento circular: movimiento circular uniforme y movimiento circular no uniforme

Cinemática del movimiento circular

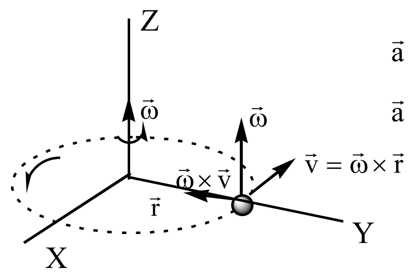
Para describir el movimiento circular lo podemos hacer de dos formas: 1. Considerando que la partícula va recorriendo una distancia a lo largo del **arco** de la circunferencia. 2. Considerando que la partícula va describiendo un **ángulo** que barre, que en cada vuelta completa es de 360º ó 2π radianes. La relación entre **arco recorrido** y **ángulo descrito** viene dada en función de que el arco descrito es el resultado de multiplicar el ángulo (en radianes) por el radio de la circunferencia.

$$\text{Longitud de la circunferencia: } \left\{ \begin{array}{l} 2\pi R = 2\pi \times R \\ \text{arco} = \text{ángulo} \times R \\ \Delta s = \Delta\theta \cdot R \end{array} \right.$$



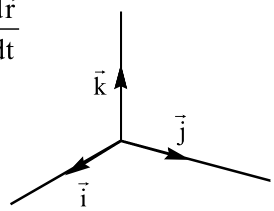
$$\Delta s = \Delta\theta \cdot R \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{arco} = \text{ángulo} \times R \\ 2\pi R = 2\pi \times R \end{array} \right.$$

La **velocidad** y la **aceleración** en el movimiento circular:



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{v} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

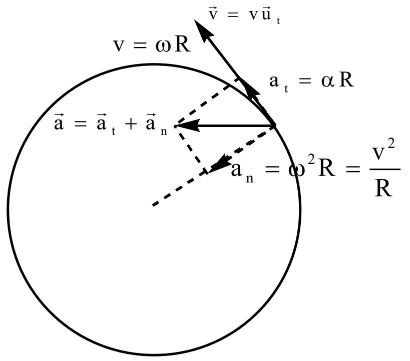


$$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k} \qquad \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i} \qquad \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{velocidad lineal: } \quad |\vec{v}| = v = \dfrac{ds}{dt} \\ \text{velocidad angular: } \quad \omega = \dfrac{d\theta}{dt} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} v = \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{d(\theta \cdot R)}{dt} = \dfrac{d\theta}{dt}\cdot R = \omega \cdot R \\ \vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{R} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{arco} = \text{ángulo}\cdot R \\ ds = d\theta \cdot R \end{array} \right\} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{d\theta}{dt}\cdot R \\ v = \omega \cdot R \end{array} \right\} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d\omega}{dt}\cdot R \\ a_t = \alpha \cdot R \end{array} \right\}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + v\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{R}\vec{u}_n = \vec{a}_t + \vec{a}_n \quad \begin{cases} a_t = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d\omega}{dt}\cdot R = \alpha\cdot R \\ a_n = \dfrac{v^2}{R} = \omega^2\cdot R \end{cases}$$

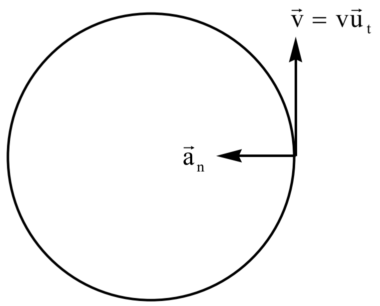


$$\vec{v} = v\vec{u}_t$$
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{R}\vec{u}_n = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

Movimiento circular uniforme: Si un objeto describe un movimiento circular uniforme, la velocidad angular es constante, ya que el tiempo que tarda en dar una vuelta es siempre el mismo. Este tiempo se llama **período**, T, y se mide en segundos. El inverso del período es el número de vueltas que da en un segundo, y se llama **frecuencia**, su unidad es el Hertz (Hz = hercios):

$$\omega = \text{cte.} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta - \theta_0}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \quad \left\{ v = \omega \times R = \frac{2\pi}{T} \times R = \frac{2\pi R}{T} \right.$$

Aunque el objeto lleva velocidad angular constante, al describir la trayectoria circular va cambiando continuamente la dirección de la velocidad, por lo que posee una aceleración asociada al cambio de dirección de la velocidad y no al módulo de la velocidad. La aceleración asociada al cambio en la dirección de la velocidad se le llama **aceleración centrípeta** o aceleración normal.

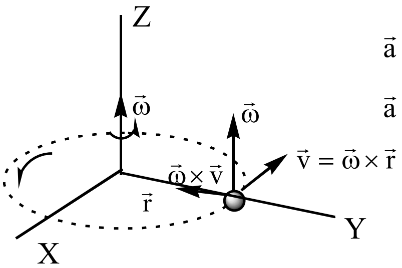


$$\vec{v} = v\vec{u}_t$$
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{R}\vec{u}_n = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$
$$v = \text{cte.} \quad \left\{ |\vec{a}_t| = \frac{dv}{dt} = 0 \right\} \quad \vec{a} = \vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{u}_n = \omega^2 R\vec{u}_n$$

En un movimiento circular uniforme la aceleración es perpendicular a la velocidad y dirigida radialmente hacia el centro.

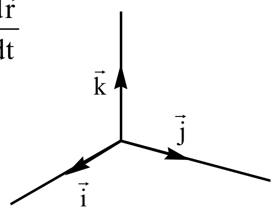
$$\begin{Bmatrix} \vec{\omega} = \omega_z\,\vec{k} \\ \vec{r} = r_y\,\vec{j} \end{Bmatrix} \quad \vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r} = \omega_z\,\vec{k}\times r_y\,\vec{j} = \omega_z r_y\left(\vec{k}\times\vec{j}\right) = \omega_z r_y\left(-\vec{i}\right) = -\omega_z r_y\,\vec{i}$$

$$\vec{a}_n = \vec{\omega}\times\vec{v} = \omega_z\,\vec{k}\times\left(-\omega_z r_y\,\vec{i}\right) = \omega_z\left(-\omega_z r_y\right)\left(\vec{k}\times\vec{i}\right) = -\omega_z^2 r_y\,\vec{j}$$



$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a}=\vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v}=\vec{a}_t+\vec{a}_n$$

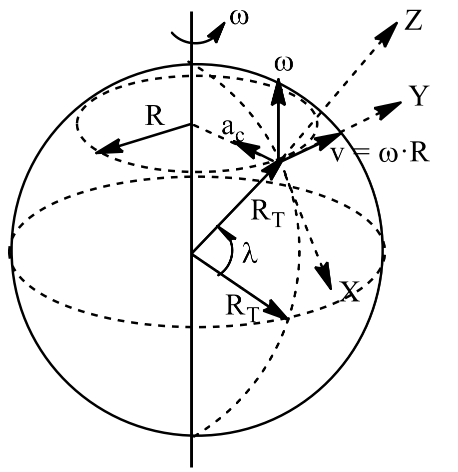


$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$$
$$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$$
$$\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&0&\omega_z\\0&r_y&0\end{vmatrix}=\vec{i}\left(-\omega_z r_y\right)=-\omega_z r_y\,\vec{i}\qquad \vec{a}_n=\vec{\omega}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&0&\omega_z\\-\omega_z r_y&0&0\end{vmatrix}=-\vec{j}\left(0+\omega_z^2 r_y\right)=-\omega_z^2 r_y\,\vec{j}$$

<u>Velocidad y aceleración de un punto en la superficie de la Tierra</u>:

Debido al movimiento de rotación de la Tierra, todos los puntos de su superficie se mueven con la misma velocidad angular, $\omega=\frac{2\pi}{T}$, por ser su período T el mismo.



$R=R_T\cdot\cos\lambda$

$$\begin{cases}\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{R}_T\\ v=\omega R_T\,\text{sen}\left(90^\circ-\lambda\right)=\omega R_T\cos\lambda=\omega R\end{cases}$$

$$\begin{cases}\vec{a}_c=\vec{\omega}\times\vec{v}=\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{R}_T\right)\\ a_c=\omega^2 R_T\cos\lambda=\omega^2 R\end{cases}$$

$R_T=6{,}37\cdot10^6$ m

$\omega=7{,}27\cdot10^{-5}$ rad/s

$v=463\cdot\cos\lambda$ m/s

$a_c=3{,}36\cdot10^{-2}\cdot\cos\lambda$ m/s^2

La latitud del punto se define como el ángulo, λ, entre el radio del ecuador de la Tierra y el radio del punto. Cuando la Tierra rota, alrededor de su eje, el punto sobre la superficie describe un círculo de radio: $R=R_T\cos\lambda\cdot$

La velocidad de cualquier punto sobre la superficie de la Tierra es tangencial al círculo que es paralelo al ecuador: $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{R}_T$, siendo $\boxed{v=\omega R_T\,\text{sen}\left(90^\circ-\lambda\right)=\omega R_T\cos\lambda=\omega R}$.

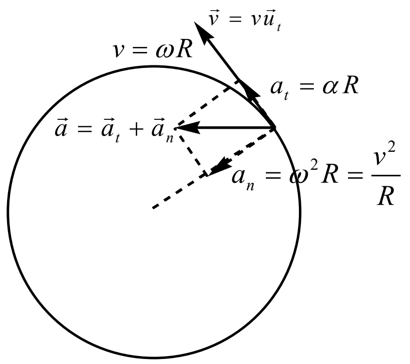
La aceleración es centrípeta, porque el movimiento circular es uniforme, y dirigida hacia el centro del círculo, siendo $\vec{a}_c=\vec{\omega}\times\vec{v}=\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{R}_T\right)$, y su magnitud $\boxed{a_c=\omega^2 R_T\cos\lambda=\omega^2 R=\frac{v^2}{R}}$.

Por lo que la velocidad es máxima en el ecuador, así como la aceleración.

Siendo el valor máximo de la aceleración el 0,3% de la gravedad.

La aceleración tangencial nos mide los cambios en magnitud del módulo de la velocidad o celeridad. La aceleración normal nos mide los cambios en la dirección de la velocidad.

Movimiento circular no-uniforme: La velocidad angular ahora no es constante y, por tanto, la partícula posee aceleración angular. Consideraremos solamente el caso de *aceleración angular constante*.



$$\begin{Bmatrix} \text{arco} = \text{ángulo} \times \text{R} \\ \text{ds} = \text{d}\theta \times \text{R} \end{Bmatrix} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \begin{Bmatrix} \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{d\theta}{dt} \times R \\ v = \omega \times R \end{Bmatrix} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \begin{Bmatrix} \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d\omega}{dt} \times R \\ a_t = \alpha \times R \end{Bmatrix}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + v\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{R}\vec{u}_n = \vec{a}_t + \vec{a}_n \quad \begin{cases} a_t = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d\omega}{dt} \times R = \alpha \times R \\ a_n = \dfrac{v^2}{R} = \omega^2 \times R \end{cases}$$

Vectorialmente: El vector de posición va desde el origen al punto de la circunferencia. La velocidad lineal es un vector tangente a la circunferencia y de origen el punto de la circunferencia. La velocidad angular tiene de origen el centro de la circunferencia, es perpendicular a la circunferencia y el sentido el que nos marque el sentido de avance del sacacorchos en el giro de la partícula. La trayectoria es una circunferencia. La aceleración:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \times \vec{R}\right) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \quad \begin{cases} \text{Si } \vec{\omega} \perp \vec{v} \\ \vec{a}_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) = -\omega^2 \vec{R} \end{cases}$$

Si la aceleración angular es constante:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad \Rightarrow \quad d\omega = \alpha \cdot dt \quad \Rightarrow \quad \int_{t_0}^{t} d\omega = \alpha \int_{t_0}^{t} dt \quad \Rightarrow \quad \omega - \omega_0 = \alpha\left(t - t_0\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \omega_0 + \alpha t}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad d\theta = \omega \cdot dt \quad \Rightarrow \quad \int_{t_0}^{t} d\theta = \int_{t_0}^{t} \left(\omega_0 + \alpha t\right) dt \quad \Rightarrow \theta - \theta_0 = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta\theta = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2}$$

$$\Delta\theta = \omega_m t = \left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}\right) t = \left(\frac{\omega_0 + \omega_0 + \alpha t}{2}\right) t = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta\theta = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2}$$

$$\Delta\theta = \omega_0\left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right) + \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right)^2 = \frac{\omega_0\omega - \omega_0^2 + \frac{1}{2}\omega^2 - \omega\omega_0 + \frac{1}{2}\omega_0^2}{\alpha} = \frac{\frac{1}{2}\omega^2 - \frac{1}{2}\omega_0^2}{\alpha} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha} \quad \Rightarrow \boxed{\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\Delta\theta}$$

Si la aceleración tangencial es constante:

$a_t = \dfrac{dv}{dt} \;\Rightarrow\; dv = a_t \cdot dt \;\Rightarrow\; \int_{t_0}^{t} dv = a_t \int_{t_0}^{t} dt \;\Rightarrow\; v - v_0 = a_t(t - t_0) \;\Rightarrow\; \boxed{v = v_0 + a_t t}$
$v = \dfrac{ds}{dt} \;\Rightarrow\; ds = v \cdot dt \;\Rightarrow\; \int_{t_0}^{t} ds = \int_{t_0}^{t}(v_0 + a_t t)dt \;\Rightarrow s - s_0 = v_0 t + \frac{1}{2}a_t t^2 \;\Rightarrow\; \boxed{\Delta s = v_0 t + \frac{1}{2}a_t t^2}$
$\Delta s = v_m t = \left(\dfrac{v_0 + v}{2}\right)t = \left(\dfrac{v_0 + v_0 + a_t t}{2}\right)t = v_0 t + \frac{1}{2}a_t t^2 \;\Rightarrow\; \boxed{\Delta s = v_0 t + \frac{1}{2}a_t t^2}$
$\Delta s = v_0\left(\dfrac{v - v_0}{a_t}\right) + \dfrac{1}{2}a_t\left(\dfrac{v - v_0}{a_t}\right)^2 = \dfrac{v_0 v - v_0^2 + \frac{1}{2}v^2 - v v_0 + \frac{1}{2}v_0^2}{a_t} = \dfrac{\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2}{a_t} = \dfrac{v^2 - v_0^2}{2a_t} \;\Rightarrow \boxed{v^2 - v_0^2 = 2a_t \Delta s}$

<u>Relación entre velocidad lineal y velocidad angular, arco recorrido y ángulo descrito</u>:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad \{\omega \cdot R = \omega_0 \cdot R + \alpha \cdot R \cdot t\} \quad v = v_0 + a_t \cdot t$$
$$\Delta\theta = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \quad \{\Delta\theta \cdot R = (\omega_0 \cdot R)\cdot t + \tfrac{1}{2}(\alpha \cdot R)\cdot t^2\} \quad \Delta s = v_0 t + \tfrac{1}{2}a_t t^2$$

<u>1.1.1.6 Analogías entre el movimiento de rotación y el lineal con aceleración constante</u>

$a_t = \dfrac{dv}{dt} \;\Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = a_t \cdot \int_{t_0}^{t} dt \Rightarrow \boxed{v - v_0 = a_t t}$	$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} \;\Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \alpha \cdot \int_{t_0}^{t} dt \Rightarrow \boxed{\omega - \omega_0 = \alpha t}$
$\Delta x = v_m t = \dfrac{v_0 + v}{2}t = \dfrac{v_0 + v_0 + a_t t}{2}t = v_0 t + \frac{1}{2}a_t t^2$	$\Delta\theta = \omega_m t = \dfrac{\omega_0 + \omega}{2}t = \dfrac{\omega_0 + \omega_0 + \alpha t}{2}t = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a_t \Delta x$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$

<u>1.1.1.7 Ecuaciones del movimiento en la superficie de la Tierra</u>

Si consideramos una caída vertical, un lanzamiento hacia arriba formando un ángulo con la horizontal, etc., son todos movimientos con aceleración constante, que es la de la gravedad. Si el origen del sistema de referencia, O, está en el suelo, el eje de ordenadas OY es positivo hacia arriba y el origen de tiempos t_0 = 0, la aceleración del movimiento tendrá de valor $\mathbf{a_y = -g = -9{,}8\ m/s^2}$. El movimiento se desarrolla sobre el plano OXY y la ecuación de la trayectoria es una parábola

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \quad \begin{Bmatrix} v_x = v_{0x} + a_x t = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} + a_y t = v_{0y} - gt \end{Bmatrix} \quad |\vec{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2 \quad \begin{Bmatrix} v_{0x} = v_0 \cos\theta \\ v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta \end{Bmatrix}$$
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\vec{a}t^2 \quad \begin{Bmatrix} r_x = r_{0x} + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 = r_{0x} + v_{0x}t \\ r_y = r_{0y} + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = r_{0y} + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{Bmatrix} \quad |\vec{r}|^2 = r_x^2 + r_y^2$$

Ecuación de la parábola:

$$\begin{Bmatrix} \Delta x = v_{0x}t \\ \Delta y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = v_{0x}t \\ y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{Bmatrix} \quad y = v_{0y}\left(\frac{x}{v_{0x}}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2 = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{1}{2}\frac{g}{v_{0x}^2}x^2$$

<u>Movimiento parabólico</u>: Ecuaciones para resolver ejercicios sabiendo que el objeto se lanza cun una velocidad inicial v_0 y el ángulo θ que es el que forma con la horizontal.

Determine: a) el tiempo de vuelo t_{vuelo} que es el tiempo que tarda en caer al suelo (r_y = 0); b) el alcance r_x una vez llegue al suelo y el alcance máximo al que podría llegar; c) la altura máxima $r_{y(máx)}$ que alcanza (v_y = 0); d) velocidad cuando llegue al suelo.

$$r_y = 0 = r_{0y} + v_{0y}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2 = v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad v_{0y}t = \tfrac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t_{(\text{vuelo})} = \frac{v_{0y}}{\tfrac{1}{2}g} = \frac{2v_{0y}}{g}$$

$$r_{x(\text{alcance})} = r_{0x} + v_{0x}t_{(\text{vuelo})} = v_{0x}t_{(\text{vuelo})} = v_{0x}\cdot\frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}$$

$$r_{x(\text{alcance})} = \frac{2v_0\cos\theta\cdot v_0\operatorname{sen}\theta}{g} = \frac{v_0^2\cdot 2\cos\theta\cdot\operatorname{sen}\theta}{g} = \frac{v_0^2\cdot\operatorname{sen}(2\theta)}{g}$$

$$r_{x(\text{alcance}-\text{máximo})} = \frac{v_0^2}{g} \quad \left\{\begin{matrix}\operatorname{sen}(2\theta) = 1\\ \theta = 45^{\circ}\end{matrix}\right\}$$

$$r_{y(\text{máxima})} \quad \Rightarrow \quad v_y = 0 = v_{0y} - gt \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{1}{2}t_{(\text{vuelo})}$$

$$\left\{\begin{aligned} r_{y(\text{máxima})} &= v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_{0y}\frac{v_{0y}}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_{0y}}{g}\right)^2 = \frac{v_{0y}^2}{g} - \frac{1}{2}g\frac{v_{0y}^2}{g^2} = \frac{1}{2}\frac{v_{0y}^2}{g}\\ r_x &= v_{0x}t = v_{0x}\frac{1}{2}t_{(\text{vuelo})} = v_{0x}\frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_{0x}v_{0y}}{g} = \frac{1}{2}r_{x(\text{alcance})}\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} v_x &= v_{0x}\\ v_y &= v_{0y} - gt_{(\text{vuelo})} = v_{0y} - g\frac{2v_{0y}}{g} = -v_{0y}\end{aligned}\right\} \quad \left|\vec{v}\right|^2_{\text{suelo}} = v_{0x}^2 + \left(-v_{0y}\right)^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 = v_{\text{inicial}}^2$$

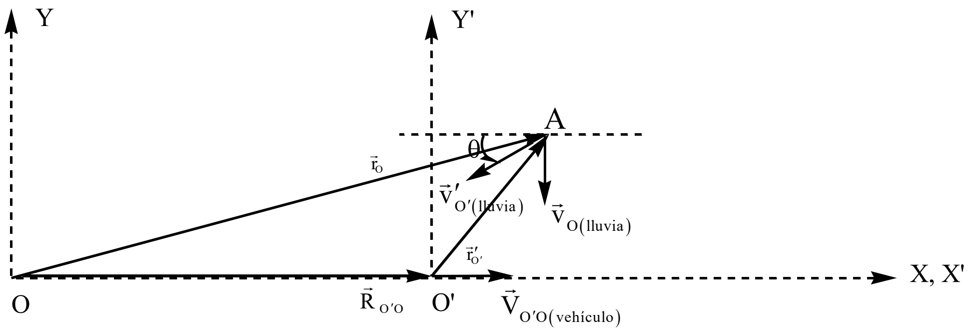
1.1.1.8 Cinemática del movimiento relativo a velocidades bajas

Siempre que analicemos el movimiento de una partícula lo haremos con respecto a un Sistema de Referencia. La velocidad de una partícula, como veremos, depende del sistema de referencia que utilicemos.

Sean los dos Sistemas de Referencia OXYZ y O'X'Y'Z', cuyos centros O y O' se encuentran a una distancia $R_{O'O}$. Una partícula situada en un punto P tendrá de coordenadas (x,y,z) para el primer sistema OXYZ y P'(x',y',z') para el segundo O'X'Y'Z'. Los vectores de posición y las velocidades instantáneas de la partícula en un sistema y en otro están relacionados por:

$$\left\{\begin{aligned}\vec{r}_O &= \vec{R}_{O'O} + \vec{r}'_{O'}\\ \vec{r}'_{O'} &= \vec{r}_O - \vec{R}_{O'O}\end{aligned}\right\}\left\{\begin{aligned}\vec{v}'_{O'} &= \vec{v}_O - \vec{V}_{O'O}\\ &\boxed{\vec{a}'_{O'} = \vec{a}_O - \vec{a}_{\text{relativa}}}\end{aligned}\right\} \vec{a}_{\text{relativa}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}'_{O'} = \vec{a}_O$$

Movimiento relativo del objeto A respecto del sistema fijo O y del sistema móvil O'



Ejercicio: Un vehículo viaja horizontalmente, con una velocidad de $V_{O'O}$ = 60 km/h, desde el interior se observa que la lluvia que cae forma un ángulo de θ = 30º con la horizontal. Determine el valor de la velocidad con la que cae la lluvia desde el interior del vehículo $v'_{O'(lluvia)}$ y desde el exterior del mismo $v_{O(lluvia)}$. Considera que desde el exterior la lluvia cae verticalmente. [$v'_{O'}$ = 69,3 km/h; v_O = 34,64 km/h]

Solución:

Desde el exterior del vehículo (sistema O) se observa que la lluvia cae verticalmente, $\vec{v}_{O(\text{lluvia})} = -v_{O(\text{lluvia})}\,\vec{j}$, y que el vehículo en movimiento (sistema O') lo hace con una velocidad relativa: $\vec{V}_{O'O(\text{vehículo})} = 60\,\frac{km}{h}\,\vec{i}$.
Siendo: $\vec{v}_{O(\text{lluvia})} = \vec{V}_{O'O(\text{vehículo})} + \vec{v}'_{O'(\text{lluvia})} = 60\,\frac{km}{h}\,\vec{i} + \vec{v}'_{O'(\text{lluvia})} = -v_{O(\text{lluvia})}\,\vec{j}$.

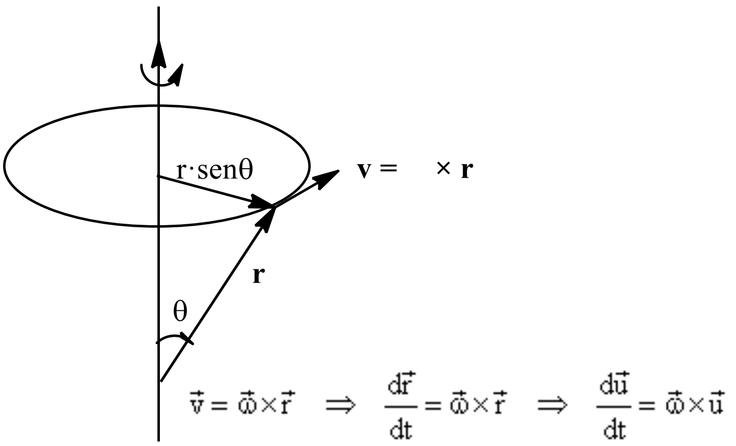
Desde el interior del vehículo (sistema O') la velocidad de la lluvia que cae se observa que forma un ángulo de 30º con la horizontal: $\vec{v}'_{O'(\text{lluvia})} = -v'_{O'(\text{lluvia})}\cdot\cos 30^{o}\,\vec{i} - v'_{O'(\text{lluvia})}\cdot\text{sen}\,30^{o}\,\vec{j}$.

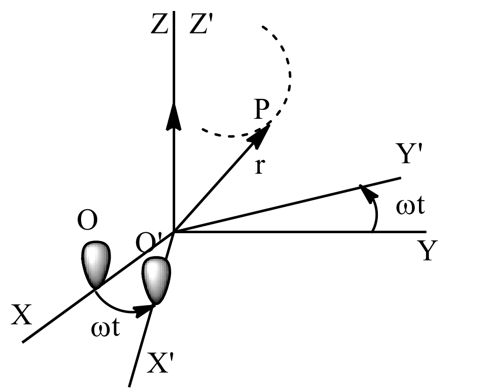
$$\vec{v}_{O(\text{lluvia})} = -v_{O(\text{lluvia})}\,\vec{j} = 60\,\tfrac{km}{h}\,\vec{i} + \vec{v}'_{O'(\text{lluvia})} = 60\,\tfrac{km}{h}\,\vec{i} - v'_{O'(\text{lluvia})}\cdot\cos 30^{o}\,\vec{i} - v'_{O'(\text{lluvia})}\cdot\text{sen}\,30^{o}\,\vec{j}$$

$$\vec{v}_{O(\text{lluvia})} = -v_{O(\text{lluvia})}\,\vec{j} = \left(60\,\tfrac{km}{h} - v'_{O'(\text{lluvia})}\cdot\cos 30^{o}\right)\vec{i} - v'_{O'(\text{lluvia})}\cdot\text{sen}\,30^{o}\,\vec{j}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 60\,\frac{km}{h} - v'_{O'(\text{lluvia})}\cdot\cos 30^{o} = 0 \\ v_{O(\text{lluvia})} = v'_{O'(\text{lluvia})}\cdot\text{sen}\,30^{o} \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l} v'_{O'(\text{lluvia})} = \dfrac{60\,\frac{km}{h}}{\cos 30^{o}} = 69{,}3\,\frac{km}{h} \\ v_{O(\text{lluvia})} = 69{,}3\,\frac{km}{h}\times\text{sen}\,30^{o} = 34{,}64\,\frac{km}{h} \end{array}\right.$$

Movimiento rotacional relativo:





Considera dos observadores O y O' en movimiento de rotación relativo y no en movimiento de traslación relativo. Para simplificar consideramos que están en el mismo punto, por lo que el observador O detecta que O' está rotando con velocidad angular ω. Sin embargo, el observador O' comprueba que O está rotando con velocidad angular –ω.

Sea una partícula en el punto P, de vector de posición $\vec{r}$, la velocidad de P medida por O es $\vec{v}_O = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_O$.

Si la partícula P está en reposo relativo al observador O', para el observador O parece moverse en un círculo con velocidad angular ω. Por lo que tiene una velocidad relativa a O dada por $\vec{v}_O = \vec{\omega}\times\vec{r}$.

Si la partícula P, observada por O', se mueve con una velocidad $\vec{v}'_{O'} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{O'}$, entonces la velocidad de la partícula P relativa a O debe ser $\vec{v}_O = \vec{v}'_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{r}$.

Esta expresión última relaciona las velocidades $\vec{v}_O$ y $\vec{v}'_{O'}$, de la misma partícula, pero medidas por dos observadores O y O', en movimiento de rotación relativo con velocidad angular ω. Esto sería el ejemplo de dos observadores que usan el centro de un carrusel como origen, uno de ellos rotando con el carrusel y otro en reposo al lado del carrusel.

La relación entre la aceleración de P medida por O, $\vec{a}_O$, y por O', $\vec{a}'_{O'}$, es un poco más complicada

$$\vec{a}_O = \vec{a}'_{O'} + 2\vec{\omega}\times\vec{v}'_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}'_{O'} = \vec{a}_O - 2\vec{\omega}\times\vec{v}'_{O'} - \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}}$$

El segundo término es llamado **aceleración de Coriolis** (1792-1843), y el tercero corresponde a la **aceleración centrífuga**. Las dos aceleraciones, la de Coriolis y la centrífuga, son el resultado del movimiento de rotación relativo de los observadores. *No son aceleraciones debidas a una acción específica aplicada sobre la partícula*.

Demostración:

Para comparar la aceleración de P medida por O y por O', consideramos que P está en reposo relativo a O'. Entonces, respecto a O, la partícula se mueve con movimiento circular uniforme con aceleración centrípeta: $\vec{a}_O = \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}$.

Si, por otra parte, la partícula P tiene un movimiento relativo a O' con una aceleración $\vec{a}'_{O'} = \left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right)_{O'}$, para calcular la aceleración de P relativa a O cuando P está en movimiento relativo a O' debemos tener en cuenta la variación respecto al tiempo de los dos términos de la ecuación $\vec{v}_O = \vec{v}'_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{r}$:

$$\vec{a}_O = \frac{d\vec{v}_O}{dt} = \left(\frac{d\vec{v}'_{O'}}{dt}\right)_O + \vec{\omega}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_O \quad \left\{\vec{\omega}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_O = \vec{\omega}\times\vec{v}_O = \vec{\omega}\times\left(\vec{v}'_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{r}\right) = \vec{\omega}\times\vec{v}'_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}\right.$$

El término $\left(\frac{d\vec{v}'_{O'}}{dt}\right)_O$ es la velocidad de cambio del vector $\vec{v}'_{O'}$ medida por el observador O, que no es la misma que la medida por el observador O' $\left(\frac{d\vec{v}'_{O'}}{dt}\right)_{O'} = \vec{a}'_{O'}$. Por ejemplo, si la partícula se mueve respecto de O' en una línea recta a velocidad constante tendremos $\left(\frac{d\vec{v}'_{O'}}{dt}\right)_{O'} = \vec{a}'_{O'} = 0$, sin embargo, respecto a O, la partícula describe un camino helicoidal y la velocidad $\vec{v}'_{O'}$ cambia, rotando con velocidad angular, ω, por lo que $\left(\frac{d\vec{v}'_{O'}}{dt}\right)_O = \vec{\omega}\times\vec{v}'_{O'}$, que es la aceleración debida a la rotación.

Por tanto, en el caso general, cuando O' observa la partícula P con una aceleración $\vec{a}'_{O'} = \left(\frac{d\vec{v}'_{O'}}{dt}\right)_{O'}$, debemos escribir: $\left(\frac{d\vec{v}'_{O'}}{dt}\right)_O = \left(\frac{d\vec{v}'_{O'}}{dt}\right)_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{v}'_{O'} = \vec{a}'_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{v}'_{O'}$.

La relación entre las aceleraciones medidas por O y por O':

$$\vec{v}_O = \vec{v}'_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{r} \quad\Rightarrow\quad \vec{a}_O = \frac{d\vec{v}_O}{dt} = \left(\frac{d\vec{v}'_{O'}}{dt}\right)_O + \vec{\omega}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_O$$

$$\begin{cases} \left(\frac{d\vec{v}'_{O'}}{dt}\right)_O = \left(\frac{d\vec{v}'_{O'}}{dt}\right)_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{v}'_{O'} = \vec{a}'_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{v}'_{O'} \\ \vec{\omega}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_O = \vec{\omega}\times\vec{v}_O = \vec{\omega}\times\left(\vec{v}'_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{r}\right) = \vec{\omega}\times\vec{v}'_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r} \end{cases}$$

$$\vec{a}_O = \vec{a}'_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{v}'_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{v}'_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r} = \vec{a}'_{O'} + 2\vec{\omega}\times\vec{v}'_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\vec{a}'_{O'} = \vec{a}_O - 2\vec{\omega}\times\vec{v}'_{O'} - \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}$$

Movimiento relativo a la Tierra:

Una de las aplicaciones más interesantes de las ecuaciones del movimiento de rotación relativo, es el estudio del movimiento de un cuerpo relativo a la Tierra. Es importante para el movimiento de huracanes, balística y satélites.

La aceleración de la gravedad es menor en el ecuador que en los polos, hecho conocido desde el siglo XVII después de la invención del reloj de péndulo, los científicos franceses encontraron que los relojes enviados a la Guayana Francesa, en la costa norte de América del Sur, van más lentos que sus homólogos de París. Además, las mediciones de la aceleración de la gravedad en el ecuador deben tener en cuenta también la rotación del planeta. Cualquier objeto que se encuentre en reposo en la superficie de la Tierra está rotando y describe una trayectoria circular, alrededor del eje de rotación de la Tierra.

La aceleración que tiene el objeto rotando el eje de la Tierra a lo largo del ecuador en una revolución sideral por día es de 0,0339 m/s²: $\omega^2 R_T = \left(\frac{2\pi}{86.164\,s}\right)^2 \cdot 6.378.137\,m = 0,03392\,\frac{m}{s^2}$. El día sideral es el tiempo en dar una vuelta sobre el eje de la Tierra que es de 23h 56min 04s, que es algo menor que el día solar de 24 h. Esta aceleración centrífuga disminuye el valor de la aceleración gravitatoria, y en el ecuador la aceleración gravitatoria eficaz, considerando la Tierra en reposo, tiene un valor de 9,7803 m/s². Esto significa que la verdadera aceleración gravitatoria en el ecuador debe ser 9,8142 m/s² (9,7803 m/s² + 0,0339 m/s²).

Sin embargo, en los polos, donde no hay aceleración centrífuga la aceleración gravitatoria real es 9,8321 m/s², que es mayor que la de 9,8142 m/s² que corresponde al ecuador sin rotación de la Tierra. Esto se debe a que la Tierra está achatada por los polos y un objeto en el ecuador está a más distancia del centro de la Tierra que si está en el polo, concretamente en el ecuador está a 21,384 km más alejado del centro, siendo el radio ecuatorial de 6.378.137 m y el radio polar de 6.356.752,3 m.

En resumen, **hay dos causas que contribuyen a que la aceleración efectiva de la gravedad sea menor en el ecuador que en los polos**. Alrededor del 70% de la diferencia se debe a que la Tierra está rotando y el 30% restante a la forma no esférica de la Tierra.

La fórmula internacional de la aceleración de la gravedad, en función de la latitud, forma de la Tierra y de la altura: $\boxed{g = 9,780327\left(1 + 0,0053024\cdot \text{sen}^2\lambda - 0,0000058\cdot\text{sen}^2 2\lambda\right) - 3,086\cdot 10^{-6}h}$

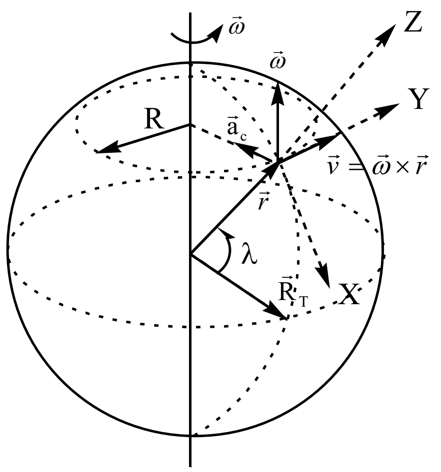
Considera un punto A sobre la superficie de la Tierra y llamamos g_0 la aceleración de la gravedad medida por un observador O no rotante. Entonces g_0 corresponde a la aceleración en el sistema no rotante, por lo que la aceleración medida por un observador O' rotando con la Tierra es:

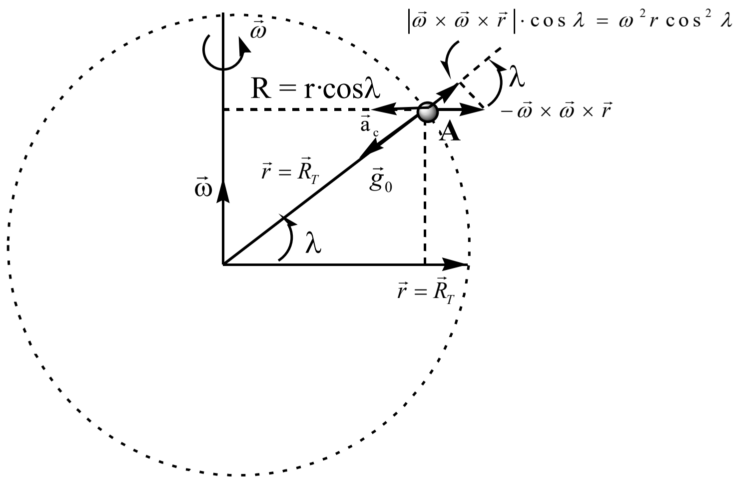
$$\vec{a}'_{O'} = \vec{g}_0 - \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r} - 2\vec{\omega}\times\vec{v}'_{O'}$$

Esta ecuación nos indica que la aceleración de un cuerpo relativa a la Tierra depende de la velocidad relativa a la Tierra, $\vec{v}'_{O'}$, y de la posición del cuerpo, $\vec{r}$. La aceleración centrífuga (≡ 0,033 m/s^2) y la de Coriolis (≡ 7,3·10^{-5}· $v'_{O'}$ m/s^2), así para velocidades inferiores a (0,033/7,3·10^{-5}) 400 m/s (1.500 km/h) la aceleración de Coriolis será cero respecto a la aceleración centrípeta. Sin embargo es importante el efecto direccional.

Aceleración centrífuga: Considera un cuerpo inicialmente en reposo, o en movimiento muy lento, de tal forma que el término de Coriolis, $\left(-2\vec{\omega}\times\vec{v}'_{O'}\right)$, sea cero, cuando se compara con el término de la aceleración centrífuga $\left(-\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}\right)$. La aceleración medida $\vec{a}'_{O'}$ se llama la aceleración efectiva de la gravedad $\vec{g}$: $\boxed{\vec{g}=\vec{g}_0-\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}}$. La aceleración centrífuga se dirige hacia fuera, como se demuestra en la figura.

Si consideramos que la Tierra es esférica y que no hay anomalías locales, consideramos que $\vec{g}_0$ apunta hacia el centro de la Tierra a lo largo de la dirección radial, por lo que la dirección de $\boxed{\vec{\mathbf{g}}=\vec{\mathbf{g}}_0-\vec{\boldsymbol{\omega}}\times\vec{\boldsymbol{\omega}}\times\vec{\mathbf{r}}}$, llamada la vertical, se desvía ligeramente de la dirección radial, y se determina por la línea de la plomada. Los líquidos en equilibrio en reposo tienen su superficie perpendicular a $\vec{g}$. Sin embargo, para los efectos prácticos, y en ausencia de perturbaciones locales se puede considerar que la vertical coincide con la dirección radial hacia el centro de la Tierra. Al ser la magnitud de $\vec{g}$ ligeramente menor que la de $\vec{g}_0$, puede expresarse el módulo de $|\vec{g}|$ como la diferencia entre el módulo de $|\vec{g}_0|$ y $|\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}|\cdot\cos\lambda$, que es la componente del vector aceleración centrífuga sobre el eje radial: $\boxed{g=g_0-|\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}|\cdot\cos\lambda=g_0-\omega^2 r\cos^2\lambda=g_0-\omega^2R_T\cos^2\lambda}$





$$\vec{g}=\vec{g}_0-\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}\quad\left\{\vec{g}_{rotando}=\vec{g}_{0(reposo)}-\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}&\left|\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)\right|=\omega^2 r\cos\lambda==\left(2\pi/_{86.164\,s}\right)^2\cdot 6.378.137\,\mathrm{m}\cdot\cos\lambda=0{,}03392\,\tfrac{m}{s^2}\cdot\cos\lambda\\&\left|\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)\right|_{ecuador}=0{,}03392\,\tfrac{m}{s^2}\cdot\cos 0^{o}=0{,}03392\,\tfrac{m}{s^2}\end{aligned}\right\}$$

$$g_{ecuador}=g_{0(ecuador)}-\left|\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)\right|_{ecuador}=9{,}7803\,\tfrac{m}{s^2}\quad\left\{g_{0(ecuador)}=9{,}7803\,\tfrac{m}{s^2}+0{,}03392\,\tfrac{m}{s^2}=9{,}8142\,\tfrac{m}{s^2}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}&\vec{g}=\vec{g}_0-\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}\\&\vec{g}_{rotando}=\vec{g}_{reposo}-\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}\end{aligned}\right\}\left\{\begin{aligned}&g_{0(polos)}=9{,}8321\,\tfrac{m}{s^2}\\&g_{0(ecuador)}=9{,}7803\,\tfrac{m}{s^2}+0{,}03392\,\tfrac{m}{s^2}=9{,}8142\,\tfrac{m}{s^2}\end{aligned}\right\}\left\{g_0\gg\left|\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)\right|\right.$$

$$\boxed{g\approx g_0-|\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}|\cdot\cos\lambda=g_0-\omega^2 r\cos\lambda\cdot\cos\lambda=g_0-\omega^2 r\cos^2\lambda=g_0-\omega^2R_T\cos^2\lambda}$$

La [fórmula internacional de la gravitación](), en función de la latitud, forma de la Tierra y de la altura:

$$\boxed{g = 9,780327\left(1 + 0,0053024 \cdot \operatorname{sen}^2 \lambda - 0,0000058 \cdot \operatorname{sen}^2 2\lambda\right) - 3,086 \cdot 10^{-6} h}$$

Latitud 90º (Polo N)	Latitud 0º (Ecuador)
g = 9,8321 m/s^2	g = 9,7803 m/s^2

Efecto de Coriolis: La aceleración de Coriolis, $\boxed{\vec{a}_{Coriolis} = -2\vec{\omega} \times \vec{v}'_{O'}}$, es perpendicular a la velocidad $\vec{v}'_{O'}$. Por lo que su efecto es desviar la partícula en una dirección perpendicular a su velocidad.

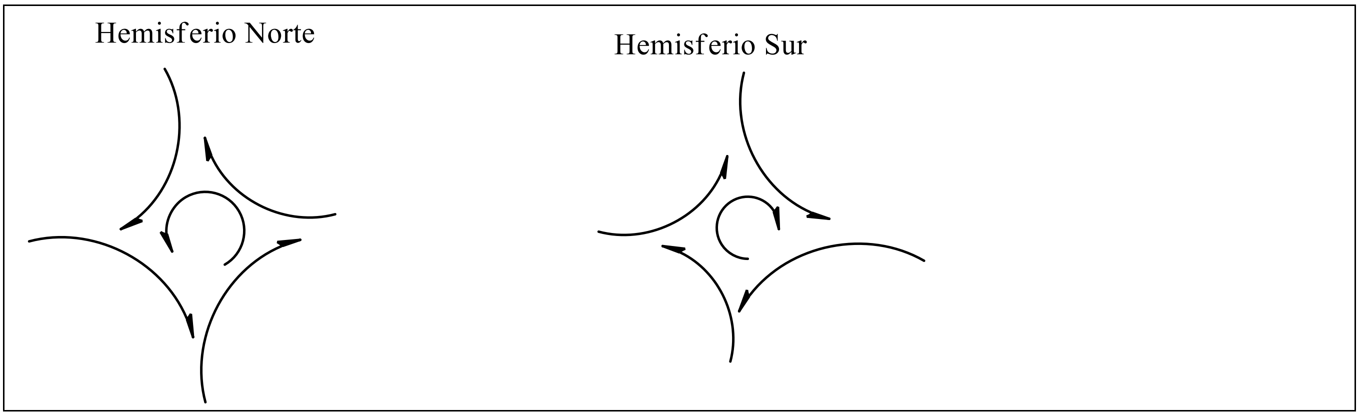
Por ejemplo, considera el sistema de ejes XYZ en un punto de la superficie de la Tierra, el eje X tangente al meridiano (sentido sur), el eje Y tangente al paralelo (sentido este), el eje Z en la vertical desde el centro de la Tierra. Si un cuerpo cae libremente en dirección vertical por el eje Z $\left(\vec{v}'_{O'} = -v'_z \vec{k}\right)$, hacia el centro de la Tierra, su camino **se desvía ligeramente hacia el este**, ya que la velocidad angular de la Tierra tiene componentes solamente sobre el eje X y el eje Z: $\vec{\omega}_{Tierra(H.\ Norte)} = -\omega_x \vec{i} + \omega_z \vec{k}$

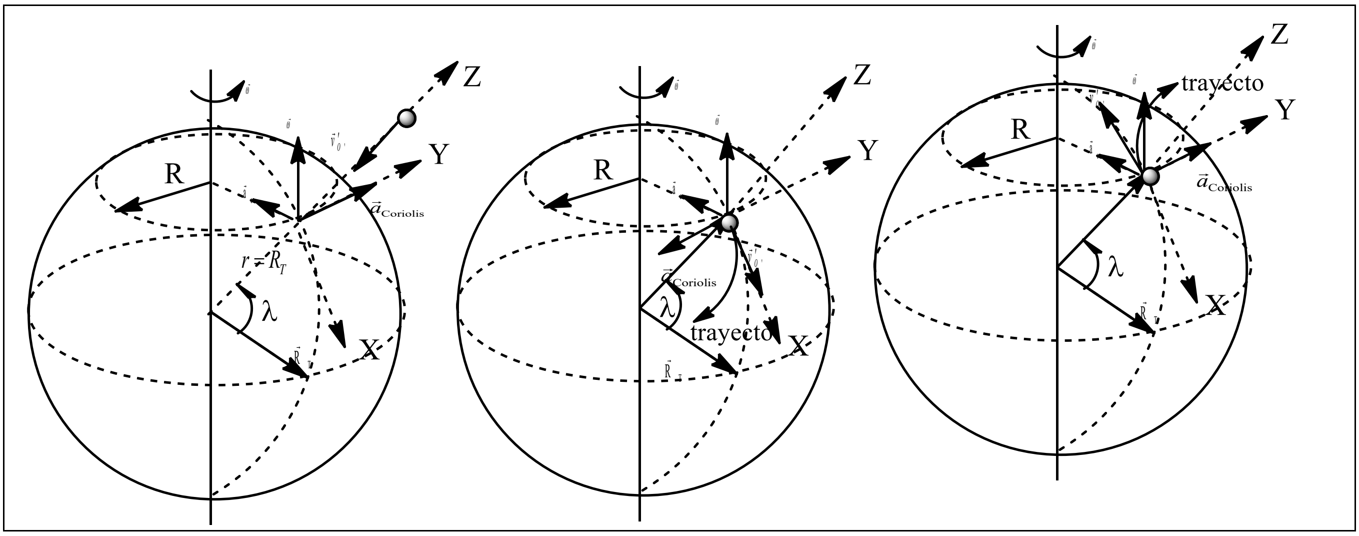
$$\begin{Bmatrix} \vec{a}_{Coriolis} = -2\vec{\omega} \times \vec{v}'_{O'} \\ \vec{\omega}_{Tierra(H.\ Norte)} = -\omega_x \vec{i} + \omega_z \vec{k} \\ \vec{v}'_{O'} = -v'_z \vec{k} \end{Bmatrix} \quad \vec{a}_{Coriolis} = -2\vec{\omega} \times \vec{v}'_{O'} = -2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\omega_x & 0 & \omega_z \\ 0 & 0 & -v'_z \end{vmatrix} = -2\left[-\vec{j}\left(\omega_x v'_z\right)\right] = 2\omega_x v'_z \vec{j}$$

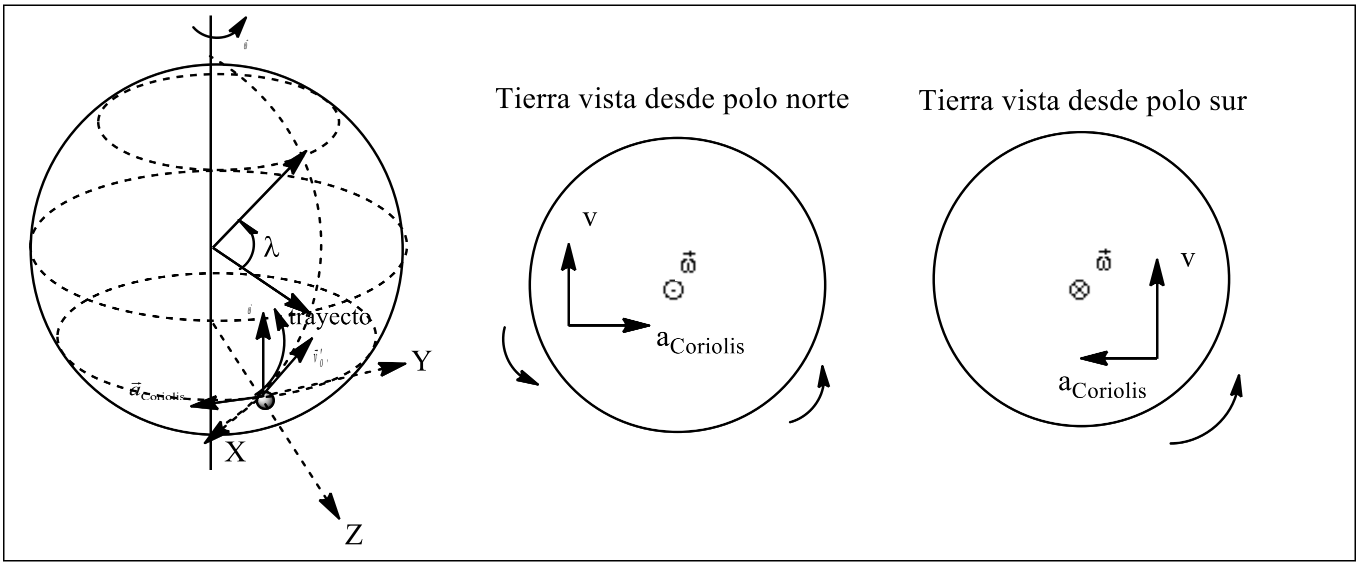
Si la partícula se mueve en un plano horizontal, **la aceleración de Coriolis tiende a desviar el camino hacia la derecha, en el hemisferio norte y hacia la izquierda en el hemisferio sur**. Siendo en el Hemisferio Sur: $\vec{\omega}_{Tierra(H.\ Sur)} = -\omega_x \vec{i} - \omega_z \vec{k}$

$$\begin{Bmatrix} \vec{a} = -2\vec{\omega} \times \vec{v}'_{O'} \\ \vec{\omega}_{Tierra(H.\ Norte)} = -\omega_x \vec{i} + \omega_z \vec{k} \\ \vec{v}'_{O'} = -v'_x \vec{i} \end{Bmatrix} \quad \vec{a}_{Coriolis(H.\ Norte)} = -2\vec{\omega} \times \vec{v}'_{O'} = -2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -v'_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2\left[-\vec{j}\left(-\omega_z\left(-v'_x\right)\right)\right] = 2\omega_z v'_x \vec{j}$$

$$\begin{Bmatrix} \vec{a} = -2\vec{\omega} \times \vec{v}'_{O'} \\ \vec{\omega}_{Tierra(H.\ Sur)} = -\omega_x \vec{i} - \omega_z \vec{k} \\ \vec{v}'_{O'} = -v'_x \vec{i} \end{Bmatrix} \quad \vec{a}_{Coriolis(H.\ Sur)} = -2\vec{\omega} \times \vec{v}'_{O'} = -2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\omega_x & 0 & -\omega_z \\ -v'_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2\left[-\vec{j}\left(-\left(-\omega_z\right)\left(-v'_x\right)\right)\right] = -2\omega_z v'_x \vec{j}$$







El efecto de Coriolis se puede comprobar en la rotación de las tormentas alrededor de los centros de bajas presiones y la rotación del plano de oscilación de un péndulo.

1.1.2 Leyes de Newton de la dinámica de una partícula

Las leyes de Newton en su forma convencional (1642-1727) en Principia (1687):

1ª.- Todo cuerpo permanece en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme a menos que sobre él actúe una fuerza.

2ª.- Todo cuerpo sobre el que actúa una fuerza o varias se mueve de tal forma que la variación de su **momento lineal** o cantidad de movimiento por unidad de tiempo es igual a la fuerza neta: $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{F}_{neta} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\vec{a}$

3ª.- Cuando dos cuerpos ejercen fuerzas entre sí, estas fuerzas son de intensidades iguales y sentidos opuestos. Si sobre el cuerpo 1 (F_{12}) ejerce una fuerza el 2 esta ha de ser igual a la fuerza que sobre el 2 (F_{21}) ejerce el 1: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

La primera ley: Se conoce como **ley de inercia** y no hace distinción entre una partícula en reposo y una partícula moviéndose con velocidad constante.

Únicamente contiene un significado preciso para una fuerza nula, es decir, que una partícula permanece en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme si no está sometido a la acción de una fuerza. A esta propiedad de la materia le llamó Galileo su **inercia**, que se define como *la incapacidad de los cuerpos para salir del estado de reposo, para cambiar las condiciones de su movimiento o para cesar en él, sin la aplicación o intervención de alguna fuerza*.

Si una partícula está en reposo o en movimiento con velocidad constante depende del sistema de referencia, desde el que se observa la partícula. Un **sistema de referencia** es un juego de sistemas coordenados -líneas que sirven para determinar la posición de un punto, y a los ejes o planos a que se refieren aquellas líneas- en reposo relativo entre ellos.

Considera una bola quieta en el pasillo de un avión que está moviéndose en línea recta. En un sistema coordenado unido al avión la bola está en reposo, y permanecerá en reposo relativo al avión mientras en avión vuele con velocidad constante. En un sistema coordenado sujeto a la Tierra, la bola se está moviendo con la velocidad constante del avión. De acuerdo con la primera ley de Newton, la bola continuará moviéndose con velocidad constante en el sistema de referencia de la Tierra, y permanecerá en reposo en el sistema de referencia del avión, a no ser que sobre ella actúe una fuerza neta.

Un sistema de referencia en el que la ley de inercia se cumpla exactamente se llama **sistema de referencia inercial**. Cualquier sistema de referencia moviéndose con velocidad constante relativa a un sistema de referencia inercial también es un sistema inercial.

Si ahora suponemos que el avión acelera hacia delante, respecto al suelo, la bola rodará retrocediendo, con una aceleración relativa al avión aunque no hay fuerza actuando sobre ella. La bola acelera en el sistema de referencia del avión a pesar de que no haya una fuerza externa neta actuando sobre ella. También, el respaldo del asiento ejercerá una fuerza horizontal hacia delante sobre una persona sentada, pero la persona no tiene aceleración relativa al avión. *La ley de inercia no se cumple en el sistema de referencia del avión acelerando*.

Un sistema de referencia acelerando relativo a un sistema de referencia inercial no es un sistema de referencia inercial. Por lo que la primera ley de Newton nos da un criterio para determinar si un sistema de referencia es un sistema inercial.

Un sistema de referencia unido a la superficie de la Tierra no es un sistema de referencia completamente inercial debido a la pequeña aceleración de la superficie de la Tierra (relativa al centro de la Tierra) debida a la rotación y a la pequeña aceleración debida a la rotación alrededor del Sol. Pero como son del orden de 0,01 m/s^2 o inferiores se pueden despreciar y es una buena aproximación considerar que un sistema de referencia en la superficie de la Tierra es un sistema de referencia inercial.

La segunda ley: Con la primera ley nos permiten definir la fuerza. Una **fuerza** es una influencia externa sobre una partícula que le causa una aceleración relativa en un sistema de referencia inercial. La **dirección** de la fuerza es la dirección de la aceleración $\boxed{\vec{F}_{neta} = m\vec{a}}$. La **magnitud** de la fuerza es el producto de la masa y la magnitud de la aceleración.

La **masa es una propiedad intrínseca de un objeto que mide su resistencia a la aceleración**. Es decir, **la masa de un objeto caracteriza la inercia del objeto, que es su resistencia a ser acelerado**. La relación de dos masas se define cuantitativamente por la aplicación de la misma fuerza F a cada una y comparando sus aceleraciones.

$$F = m_1 a_1 = m_2 a_2 \quad \left\{ \frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2} \right\}$$

La unidad de masa es el kilogramo. La fuerza requerida para producir una aceleración de 1 m/s^2 sobre un objeto de masa 1 kg se define como 1 newton (N).

Por tanto, la segunda ley nos da una afirmación explícita acerca de la fuerza, en la cual la fuerza se relaciona con la rapidez de cambio del momento lineal, $\vec{p} = m\vec{v}$. Ahora bien, la definición de fuerza sólo expresa algo completo y preciso cuando se define la «masa».

La tercera ley: Es realmente un principio, ya que se trata de una declaración relativa del mundo físico real y contiene toda la física de que están dotadas las leyes del movimiento de Newton. La palabra fuerza se usa para describir la interacción entre dos objetos. Cuando dos objetos interactúan ejercen se ejercen fuerzas entre ellos. La tercera ley establece que estas fuerzas son iguales en magnitud y sentidos opuestos.

Con la tercera ley, cuando consideramos dos objetos 1 y 2, si el objeto 1 ejerce una fuerza sobre el 2, el objeto 2 ejerce una fuerza sobre el 1 que es igual en magnitud y opuesta en sentido. Por lo que las fuerzas acontecen en pares. Son conocidas como fuerzas de **acción** y de **reacción**, aunque esta terminología es desafortunada porque parece que una de ellas es una fuerza que *reacciona* a la otra, lo que no es cierto. Las dos fuerzas se producen simultáneamente. **Las fuerzas de acción y reacción no pueden equilibrarse nunca entre ellas**, porque actúan sobre objetos diferentes.

Por ejemplo, si colocamos un objeto sobre una mesa, actúa una fuerza **sobre el objeto**, hacia el centro de la Tierra, que es el peso, y una fuerza igual y opuesta es la ejercida por el objeto **sobre la Tierra**. Las dos son el par acción-reacción. Pero como el objeto no se mueve debe actuar otra fuerza que lo equilibre, esta es la fuerza ejercida por la mesa sobre el objeto, que debe ir hacia arriba, llamada fuerza normal $\vec{F}_n$ y que equilibra el peso del objeto. Por su parte, el objeto también ejerce una fuerza sobre la mesa $-\vec{F}_n$, siendo un para acción-reacción.

Por la tercera ley tenemos que: $\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \\ m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2 \end{array} \right\} \quad \dfrac{m_1}{m_2} = -\dfrac{\vec{a}_2}{\vec{a}_1}$

Siempre nos será posible establecer una masa unidad y determinar la masa de otro cuerpo comparando el cociente de aceleraciones cuando interactúen los dos. La masa así determinada es la **masa inerte**, *que es la masa que determina la aceleración de un cuerpo sometido a una fuerza dada*. Si la masa se determina pesando un cuerpo es la **masa gravitatoria** o pesante. El primero en comprobar la equivalencia entre las dos masas fue Galileo (caída de cuerpos), Newton, etc.

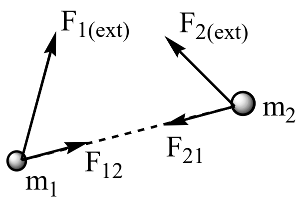
La tercera ley no es un principio general de la Naturaleza, puesto que sólo se aplica en el caso de que la fuerza ejercida por una partícula sobre otra esté dirigida a lo largo de la recta que une a ambas. Son éstas las llamadas **fuerzas centrales** y a ellas se aplica la tercera ley, sean las fuerzas atractivas o repulsivas. Ejemplos de **fuerzas centrales** son las **gravitatorias** y las **electrostáticas**, por lo cual las leyes de Newton podrán aplicarse a los problemas en los que intervengan fuerzas de esta naturaleza.

Muchas fuerzas que se ejercen los objetos son por **contacto directo**, estas fuerzas son de origen electromagnético ya que son ejercidas entre las moléculas de cada objeto. Al colocar un objeto sobre la mesa, el peso del objeto va hacia abajo presionando las moléculas de la superficie de la mesa, que resisten la compresión y ejercen una fuerza hacia arriba sobre el objeto. Esta fuerza perpendicular a la superficie se llama **fuerza normal**. Los objetos en contacto también pueden ejercerse fuerzas paralelas a la superficie de contacto. La componente paralela de una fuerza de contacto se llama **fuerza de fricción**. Cuando un muelle se comprime, o se alarga un poco, la fuerza que ejerce se comprueba experimentalmente que es: $\boxed{F_x = -k \cdot \Delta x}$. Donde k es la constante de fuerza que nos mide la rigidez del muelle y el signo negativo nos dice que cuando el muelle se alarga o se comprime, la fuerza que ejerce va en sentido contrario. Esta ecuación se conoce como **Ley de Hooke**. Las fuerzas elásticas son centrales, ya que son manifestaciones macroscópicas de fuerzas electrostáticas microscópicas.

Si **la fuerza depende de las velocidades** de las partículas en interacción no es una fuerza central esencialmente, y no se aplica la tercera ley en tales casos. Así la fuerza electromagnética que se ejercen las partículas con carga eléctrica y en movimiento no obedece la tercera ley de Newton, puesto que dicha fuerza se propaga a la velocidad de la luz; incluso la fuerza gravitatoria que se ejercen las partículas en movimiento depende de la velocidad, pero el efecto de ésta es pequeño y difícil de detectar, siendo el único efecto observable la precesión del perihelio de los planetas más cercanos al Sol.

Las dos primeras leyes afectan a una única partícula a la que se le aplican fuerzas. Sin embargo, la tercera ley implica una segunda partícula, la que ejerce la fuerza.

La tercera ley está íntimamente relacionada con la **ley de conservación del momento lineal**.



$$\vec{F}_{1(\text{neta})} = \vec{F}_{1(\text{ext})} + \vec{F}_{12} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} = \frac{d(m_1\vec{v}_1)}{dt}$$

$$\vec{F}_{2(\text{neta})} = \vec{F}_{2(\text{ext})} + \vec{F}_{21} = \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \frac{d(m_2\vec{v}_2)}{dt}$$

$$\vec{F}_{\text{total}} = \vec{F}_{1(\text{ext})} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{2(\text{ext})} + \vec{F}_{21} = \vec{F}_{1(\text{ext})} + \vec{F}_{2(\text{ext})} = \frac{d\vec{p}_{\text{total}}}{dt} = \frac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

$$\vec{F}_{\text{ext}} = 0 = \frac{d\vec{p}_{\text{total}}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{\text{total}} = \text{cte} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'}$$

1.1.2.1 Ejercicios de ejemplo de la segunda ley de la dinámica

1) Una fuerza sobre un objeto, de masa m_1 = 1 kg, le produce una aceleración a_1 = 5 m/s^2, y si la misma fuerza se aplica sobre otro objeto m_2 le produce una aceleración a_2 = 20 m/s^2. Determine: a) la masa del segundo objeto; b) la magnitud de la fuerza. [a) 0,25 kg; b) 5 N]

Respuesta:

$$F = m_1a_1 = m_2a_2 \quad \Rightarrow \quad m_2 = m_1\frac{a_1}{a_2} = 1\,\text{kg} \times \frac{5\,\frac{m}{s^2}}{20\,\frac{m}{s^2}} = 0{,}25\,\text{kg}$$

$$F = m_1a_1 = 1\,\text{kg} \times 5\,\tfrac{m}{s^2} = 5\,\text{N} \quad \Leftrightarrow \quad F = m_2a_2 = 0{,}25\,\text{kg} \times 20\,\tfrac{m}{s^2} = 5\,\text{N}$$

2) Una partícula de masa m = 0,5 kg está sometida a dos fuerzas: $\vec{F}_1 = 2\,\text{N}\,\vec{i} - 4\,\text{N}\,\vec{j}$ y $\vec{F}_2 = -2\,\text{N}\,\vec{i} + 5\,\text{N}\,\vec{j}$. Si la partícula está en el origen y parte desde el reposo, determina al cabo de un tiempo de 2 s su posición y su velocidad. [a) r_y = 4 m; b) v_y = 4 m/s]

Respuesta:

$$\vec{F}_{\text{neta}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \left(2\vec{i} - 4\vec{j}\right) + \left(-2\vec{i} + 5\vec{j}\right)\text{N} = 1\,\text{N}\,\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{neta}}}{m} = \frac{1\,\text{N}\,\vec{j}}{0{,}5\,\text{kg}} = 2\,\tfrac{m}{s^2}\vec{j}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0t + \tfrac{1}{2}\vec{a}t^2 = 0 + 0 + \tfrac{1}{2} \times 2\,\tfrac{m}{s^2}\vec{j} \times (2\,\text{s})^2 = 4\,\text{m}\,\vec{j}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t = 0 + 2\,\tfrac{m}{s^2}\vec{j} \times 2\,\text{s} = 4\,\tfrac{m}{s}\vec{j}$$

3) Sobre un objeto de masa 70 kg que está en reposo se aplica una fuerza constante durante 3 s. Si se ha desplazado 9,0 m determina el valor de la fuerza. [140 N]

Respuesta:

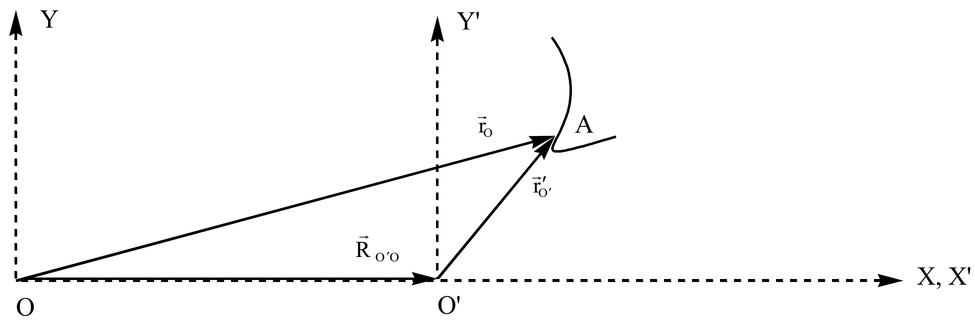
$$\Delta x = v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2 = 0 + \tfrac{1}{2} a t^2 \Rightarrow \quad a = \frac{\Delta x}{\tfrac{1}{2} t^2} = \frac{9{,}0\ \text{m}}{\tfrac{1}{2} \times (3\ \text{s})^2} = 2\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$F = ma = 70\ \text{kg} \times 2\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} = 140\ \text{N}$$

1.1.3 Características dinámicas de los sistemas inerciales y no inerciales

Un sistema se llama **inercial** si se comporta como una partícula libre, es decir, no está sujeto a interacción, y por tanto o está **en reposo o se mueve con velocidad constante** y **sin aceleración**, por lo que no ha de rotar. Dos sistemas se dice que son inerciales uno con respecto del otro si están en reposo relativo o se mueven con velocidad constante uno con respecto del otro.

Movimiento relativo del objeto A respecto del sistema fijo O y del sistema móvil O':



Sistemas inerciales: Sean los Sistemas OXYZ y O'X'Y'Z' que se encuentran a una distancia R los dos centros, son inerciales si uno respecto de otro está **en reposo o se mueve con velocidad constante** y **sin aceleración**, por lo que no ha de rotar.

Una partícula situada en el punto P tendrá de coordenadas (x,y,z) para el primero y (x',y',z') para el segundo. Relacionados por:

$$\boxed{\vec{r}_O = \vec{R}_{O'O} + \vec{r}'_{O'}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d\vec{r}_O}{dt} = \dfrac{d\vec{R}_{O'O}}{dt} + \dfrac{d\vec{r}'_{O'}}{dt} \\ \boxed{\vec{v}_O = \vec{V}_{O'O} + \vec{v}'_{O'}} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d\vec{v}_O}{dt} = \dfrac{d\vec{V}_{O'O}}{dt} + \dfrac{d\vec{v}'_{O'}}{dt} \\ \boxed{\vec{a}_O = \vec{a}_{O'O} + \vec{a}'_{O'}} \end{array} \right\} \quad \boxed{\vec{a}_{O'O} = 0} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_O = \vec{a}'_{O'} \\ \boxed{\vec{F}_O = \vec{F}'_{O'}} \end{array} \right.$$

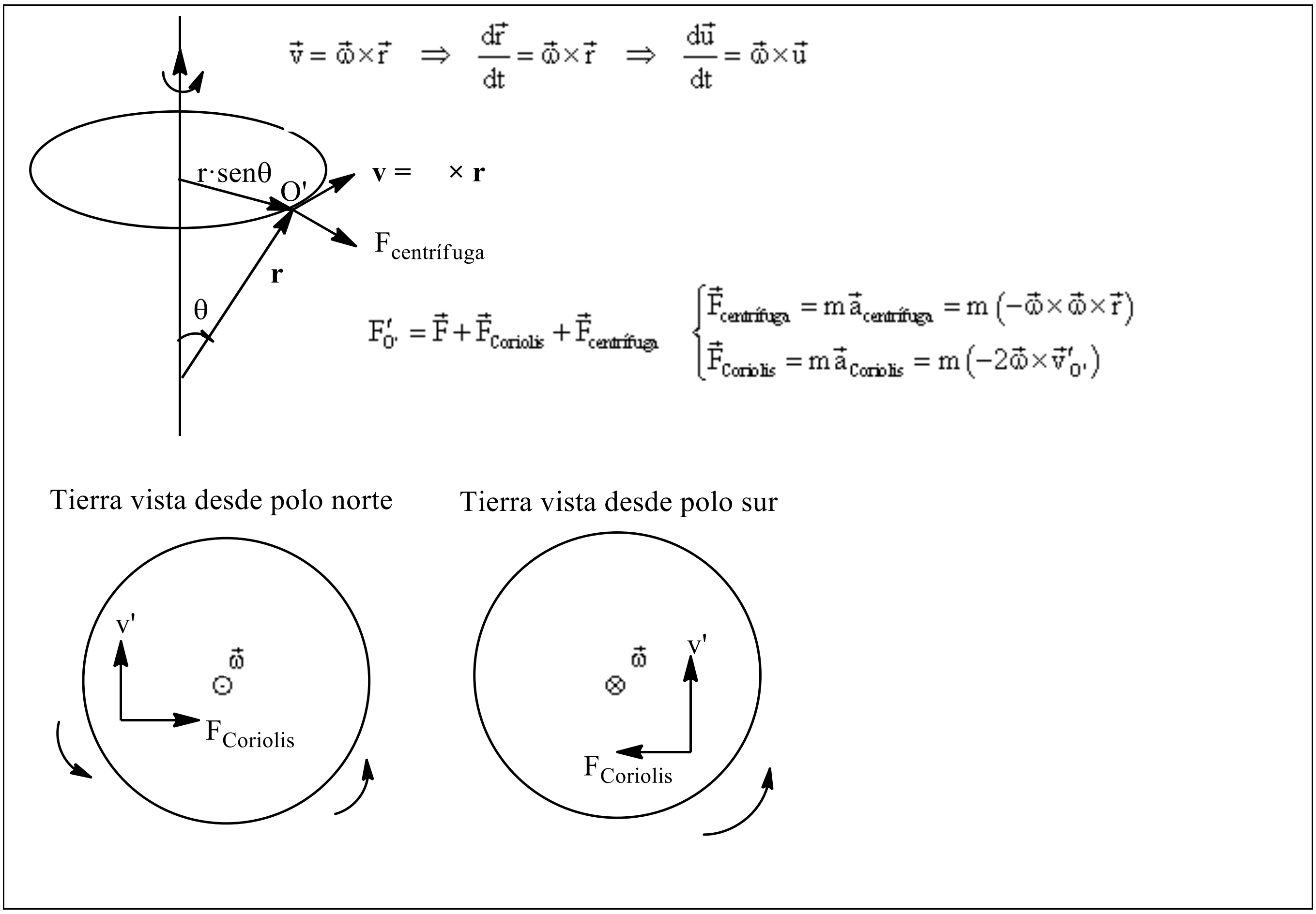
En los sistemas inerciales son iguales las leyes del movimiento, es decir, miden las mismas aceleraciones de la partícula situada en un punto P y las mismas fuerzas aplicadas en P. Esto es lo que se denomina el **Principio Clásico de Relatividad**.

Sistemas no inerciales: Si el Sistema O'X'Y'Z' es no inercial, es decir que la velocidad relativa de éste sistema con respecto al OXYZ no es constante, está acelerando pero sin rotación. Por lo que el sistema O'X'Y'Z' con respecto al OXYZ posee una aceleración:

$$\boxed{\vec{r}_O = \vec{R}_{O'O} + \vec{r}'_{O'}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{\vec{v}_O = \vec{V}_{O'O} + \vec{v}'_{O'}} \\ \boxed{\vec{a}_O = \vec{a}_{O'O} + \vec{a}'_{O'}} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \vec{a}'_{O'} = \vec{a}_O - \vec{a}_{O'O} \\ m\vec{a}'_{O'} = m\vec{a}_O - m\vec{a}_{O'O} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{\vec{F}'_{O'} = \vec{F}_O + \vec{F}_{inercial}} \\ \boxed{\vec{F}_{inercial} = -m\vec{a}_{O'O}} \end{array} \right.$$

En el sistema no inercial O'X'Y'Z' medimos una fuerza distinta que en el sistema inercial OXYZ, por lo que se considera que en el primero aparece una *fuerza ficticia llamada de inercia* que es consecuencia de la aceleración relativa del sistema no inercial O'X'Y'Z' con respecto al inercial OXYZ.

La 2ª ley de Newton del movimiento en un sistema rotando:



Consideramos una partícula de masa m en la posición r (punto P). En el sistema O en reposo la partícula obedece la segunda ley de Newton: $\vec{F}_{neta} = m\vec{a}_O$. Siendo $\vec{a}_O$ la aceleración de la partícula medida por O (sistema fijo), que es distinta de la aceleración medida por O' ($\vec{a}'_{O'}$), y se relacionan por la expresión:

$$\vec{a}_O = \vec{a}'_{O'} + 2\vec{\omega}\times\vec{v}'_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\vec{a}'_{O'} = \vec{a}_O - 2\vec{\omega}\times\vec{v}'_{O'} - \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}}$$

Por lo que la segunda ley aplicada a la partícula de masa m para el sistema rotante O':

$$m\vec{a}'_{O'} = m\vec{a}_O - m2\vec{\omega}\times\vec{v}'_{O'} - m\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$F'_{O'} = \vec{F} + \vec{F}_{Coriolis} + \vec{F}_{centrífuga} \quad \begin{cases} \vec{F}_{Coriolis} = m\vec{a}_{Coriolis} = m\left(-2\vec{\omega}\times\vec{v}'_{O'}\right) \\ \vec{F}_{centrífuga} = m\vec{a}_{centrífuga} = m\left(-\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}\right) \end{cases}$$

1.1.4 Teorema impulso-momento lineal. Principio de conservación del momento lineal

El teorema del impulso y del momento lineal para un sistema de partículas en movimiento relativo en un sistema de referencia inercial:

$$\sum\vec{F}_i = \sum\frac{d\vec{p}_i}{dt} \quad \left\{\sum\vec{F}_i dt = \sum d\vec{p}_i\right\} \quad \left\{I = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1\right.$$

Si dos objetos tienen una interacción intensa, como una colisión o una explosión, a partir de la segunda ley de Newton se obtiene una relación entre las velocidades de los objetos antes y después de la interacción.

Una **colisión** es una interacción de corta duración entre dos objetos, de 1 a 10 ms. Por otra parte, una **fuerza impulsiva** es una fuerza grande ejercida durante un corto período de tiempo.

Si consideramos un objeto viajando en línea recta sobre el eje X, que experimenta una colisión con otro objeto, la fuerza impulsiva le hace cambiar de velocidad:

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x \quad \left\{ \begin{array}{l} dp_x = F_x dt \\ p_{fx} - p_{ix} = \int_{t_i}^{t_f} F_x dt \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Impulso:} \quad I_x = \int_{t_i}^{t_f} F_x dt \\ p_{fx} - p_{ix} = \Delta p_x = I_x \end{array} \right.$$

El teorema impulso-momento lineal nos dice que un impulso ejercido sobre una partícula cambia su momento lineal. Este teorema se obtiene de la segunda ley de Newton.

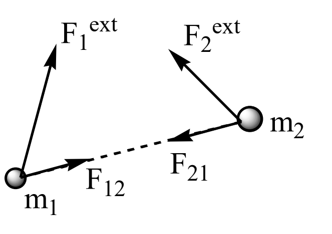
Principio de conservación del momento lineal

«*Si la fuerza externa neta aplicada a un sistema de partículas es cero, el momento lineal total del sistema es constante*».

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{1(neta)} = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{12} = \dfrac{d\vec{p}_1}{dt} = \dfrac{d\left(m_1\vec{v}_1\right)}{dt} \\ \vec{F}_{2(neta)} = \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{21} = \dfrac{d\vec{p}_2}{dt} = \dfrac{d\left(m_2\vec{v}_2\right)}{dt} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \\ \vec{F}_{total} = \vec{F}_{1(neta)} + \vec{F}_{2(neta)} = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext} = \vec{F}_{neta}^{ext} \end{array} \right.$$

$$\vec{F}_{total} = \vec{F}_{neta}^{ext} = \frac{d\vec{p}_{total}}{dt} = \frac{d\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right)}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

$$\vec{F}_{neta}^{ext} = 0 = \frac{d\vec{p}_{total}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{total} = cte \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'}$$



$$\vec{F}_{total} = \vec{F}_{neta}^{ext} = \frac{d\vec{p}_{total}}{dt} = \frac{d\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right)}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

$$\vec{F}_{neta}^{ext} = 0 = \frac{d\vec{p}_{total}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{total} = cte$$

$$\boxed{\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'}$$

Colisión entre dos objetos:

Si en el choque de dos objetos consideramos el movimiento de los dos, necesitamos aplicar también la tercera ley de Newton. Y si lo hacemos en el lenguaje impulso y momento nos lleva a una de las leyes más importantes de la física, la ley de conservación del momento lineal.

Consideramos un objeto viajando en línea recta sobre el eje X, que experimenta una colisión con otro objeto. Las fuerzas durante la colisión, como las partículas están interactuando, son el par acción-reacción:

$$\text{Segunda ley:} \quad \left\{ \vec{F}_{12} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} \right\} \left\{ \vec{F}_{21} = \frac{d\vec{p}_2}{dt} \right\} \quad \text{Tercera ley:} \quad \left\{ \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \right\}$$

$$\vec{F}_{12}+\vec{F}_{21}=0=\frac{d\vec{p}_1}{dt}+\frac{d\vec{p}_2}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\vec{p}_1+\vec{p}_2\right) \Rightarrow \boxed{\vec{p}_1+\vec{p}_2=cte} \Rightarrow \boxed{\vec{p}_1+\vec{p}_2=\vec{p}_1'+\vec{p}_2'}$$

$$\boxed{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=m_1\vec{v}_1'+m_2\vec{v}_2'} \Rightarrow m_1v_{1x}+m_2v_{2x}=m_1v_{1x}'+m_2v_{2x}'$$

Cohetes:

Un ejemplo importante de aplicación del principio de conservación del momento lineal es a los cohetes de propulsión. El problema básico es que el cohete es propulsado sin intervenir un agente externo que lo empuje.

Para analizar cuantitativamente el movimiento de un cohete debemos examinar el momento lineal total. Consideremos un cohete (sistema O') con masa m, viajando en el sentido positivo del eje X, con una velocidad respecto del suelo (sistema O) $\vec{v}_{cohete(O)}$. El cohete expulsa los gases en sentido negativo del eje X con una velocidad $\vec{v}'_{gases(O')}$, que es la velocidad relativa de los gases respecto al cohete. Si la velocidad de los gases expulsados relativa al suelo es $\vec{v}_{gases(O)}$, entonces la relación es la siguiente:

$$\vec{v}_{gases(O)}=\vec{v}_{cohete(O)}+\vec{v}'_{gases(O')} \quad \left\{v_{gases(O)}=v_{cohete(O)}-v'_{gases(O')}\right.$$

Es decir, la velocidad relativa de los gases expulsados respecto del suelo $\{v_{gases(O)}\}$ es igual a la diferencia entre la velocidad del cohete $\{v_{cohete(O)}\}$ y la velocidad de los gases respecto del cohete $\{-v'_{gases(O')}\}$: $v_{gases(O)} = v_{cohete(O)} - v'_{gases(O')}$.

La masa del cohete está disminuyendo, en el tiempo t el momento lineal del cohete es $p_{cohete}(t) = m\cdot v_{cohete(O)}$, y al cabo de un tiempo (t + dt) la masa del cohete es (m + dm), siendo dm negativa, y el nuevo momento lineal es $p_{cohete}(t + dt) = (m + dm)\cdot(v_{cohete(O)} + d\,v_{cohete(O)})$.

El combustible expulsado en el tiempo dt es (-dm) y su velocidad de escape es $v'_{gases(O')}$ relativa al cohete, siendo la velocidad **relativa al suelo** la diferencia entre la del cohete y la de escape relativa al cohete: $v_{gases(O)} = v_{cohete(O)} - v'_{gases(O')}$. Por lo que el momento lineal del combustible expulsado:

$$p_{combustible} = -dm\cdot v_{gases(O)} = -dm\cdot [v_{cohete(O)} - v'_{gases(O')}]$$

Por tanto, el momento total del sistema formado por el cohete y el combustible expulsado, en el tiempo $(t+dt)$, es:

$$p(t+dt)=p_{cohete}+p_{combustible}=(m+dm)\cdot\left(v_{cohete(O)}+dv_{cohete(O)}\right)-dm\cdot\left(v_{cohete(O)}-v'_{gases(O')}\right)$$
$$p(t+dt)=m\cdot v_{cohete(O)}+m\cdot dv_{cohete(O)}+dm\cdot v'_{gases(O')}$$

Siendo el cambio total en el momento lineal:

$$dp=p(t+dt)-p(t)=\left(m\cdot v_{cohete(O)}+m\cdot dv_{cohete(O)}+dm\cdot v'_{gases(O')}\right)-\left(m\cdot v_{cohete(O)}\right)$$
$$dp=m\cdot dv_{cohete(O)}+dm\cdot v'_{gases(O')} \quad \left\{dp=F_{externa}dt\right.$$

Si no hay una fuerza externa (gravedad), $F_{externa} = 0$, entonces dp = 0.

$$dp = F_{externa}dt = m\cdot dv_{cohete(O)} + dm\cdot v'_{gases(O')}$$

$$F_{externa} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} dp = 0 \\ p = cte. \end{Bmatrix} \quad \begin{cases} 0 = m\cdot dv_{cohete(O)} + dm\cdot v'_{gases(O')} \\ m\cdot dv_{cohete(O)} = -v'_{gases(O')}\cdot dm \end{cases}$$

$$m\cdot\frac{dv_{cohete(O)}}{dt} = -v'_{gases(O')}\cdot\frac{dm}{dt} = F_{empuje} \quad \left\{\frac{dm}{dt} < 0\right\} \quad \left\{F_{empuje} > 0\right.$$

La ecuación obtenida es como la segunda ley de Newton para una partícula, excepto que el término a la derecha $\left\{-v'_{gases(O')}\cdot dm/dt\right\}$, tiene el papel de la fuerza. Por lo que se llama fuerza de empuje, que al ser negativa y como (dm/dt) también es negativa hace que el empuje sea positivo.

La ecuación:

$$m\cdot dv_{cohete(O)} = -v'_{gases(O')}\cdot dm \quad \left\{dv_{cohete(O)} = -v'_{gases(O')}\cdot\frac{dm}{m}\right.$$

$$v'_{gases(O')} = cte. \quad \left\{\int_{v_0}^{v} dv_{cohete(O)} = -v'_{gases(O')}\cdot\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m}\right\} \begin{cases} \left(v - v_0\right)_{cohete(O)} = -v'_{gases(O')}\cdot\ln\frac{m}{m_0} \\ \left(v - v_0\right)_{cohete(O)} = v'_{gases(O')}\cdot\ln\frac{m_0}{m} \end{cases}$$

Siendo v_0 la velocidad inicial y m_0 la masa inicial del cohete (combustible y carga). Como consecuencia hay una restricción en la velocidad máxima del cohete. Así, si la masa inicial del cohete llevase un 90% de combustible cuando este se consuma queda un 10% de la masa inicial, por lo que se obtiene $m_0/m = m_0/(0{,}10\cdot m_0) = 10$ siendo $v_{cohete} = v_{0(cohete)} + v_{gases}\cdot\ln 10 = v_0 + 2{,}3\cdot v_{gases}$. Por ello es mejor que el cohete salga en varias etapas y poder adquirir más velocidad.

Ejemplo de dinámica de cohetes:

Considera que un cohete lleva un 60% de su masa inicial como combustible ($0{,}6\cdot m_0$). Determina la velocidad final del cohete, en función de la velocidad de escape de los gases, acelerando desde el reposo en el espacio libre, en los dos casos: a) si quema su combustible en una etapa; b) si quema el combustible en dos etapas, en la primera etapa quema una masa de combustible de $0{,}3\cdot m_0$, desecha el tanque, de masa $0{,}1\cdot m_0$, y quema el restante $0{,}3\cdot m_0$. [a) $0{,}92v'_{gases(O')}$; b) $0{,}36v'_{gases(O')}$; $1{,}052v'_{gases(O')}$]

Solución:

a) $v_{cohete(O)} = v_{0(cohete)} + v'_{gases(O')}\cdot\ln\frac{m_0}{m} = 0 + v'_{gases(O')}\cdot\ln\frac{m_0}{0{,}4m_0} = v'_{gases(O')}\cdot\ln\frac{1}{0{,}4} = 0{,}92v'_{gases(O')}$

b) 1ª etapa: $v_{cohete(O)} = v_{0(cohete)} + v'_{gases(O')}\cdot\ln\frac{m_0}{m} = 0 + v'_{gases(O')}\cdot\ln\frac{m_0}{0{,}7m_0} = v'_{gases(O')}\cdot\ln\frac{1}{0{,}7} = 0{,}36v'_{gases(O')}$

2ª etapa: $v_{cohete(O)} = v_{0(cohete)} + v'_{gases(O')}\cdot\ln\frac{m_0}{m} = 0{,}36v'_{gases(O')} + v'_{gases(O')}\cdot\ln\frac{0{,}6m_0}{0{,}3m_0} = 0{,}36v'_{gases(O')} + 0{,}69v'_{gases(O')} = 1{,}05v'_{gases(O')}$

1.1.4.1 Ejercicios de aplicación del principio de conservación del momento lineal

1) Un rifle de masa m_1 = 3 kg está en reposo con una bala de masa m_2 = 10 g. Al disparar el rifle la velocidad de salida de la bala es de v'_2 = 900 m/s, determina la velocidad v'_1 de retroceso del rifle.

Solución:

$$\vec{p}_i = \vec{p}'_f \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{cases} 0 = p'_{1x} + p'_{2x} \\ 0 = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x} \end{cases}\right\} \quad v'_{1x} = \frac{-m_2 v'_{2x}}{m_1} = -\frac{0,010\,\text{kg} \times 900\,\frac{m}{s}}{3\,\text{kg}} = -3,0\,\tfrac{m}{s}$$

2) Un núcleo de uranio-238, de masa m = 238·u, es radiactivo. Espontáneamente se desintegra en un fragmento pequeño que es expulsado con una velocidad de $v'_{2x} = 1{,}50\cdot 10^7$ m/s, y el núcleo que queda retrocede con una velocidad de $v'_{1x} = -2{,}56\cdot 10^5$ m/s. Determina la masa atómica del fragmento expulsado m_2 y la del núcleo hijo m_1.

Solución:

$$\vec{p}_i = \vec{p}'_f \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{cases} 0 = p'_{1x} + p'_{2x} \\ 0 = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x} \\ m = m_1 + m_2 \end{cases}\right\} \begin{cases} 0 = \left(m - m_2\right) v'_{1x} + m_2 v'_{2x} \\ 0 = m v'_{1x} - m_2 v'_{1x} + m_2 v'_{2x} \\ 0 = m v'_{1x} - m_2 \left(v'_{1x} - v'_{2x}\right) \end{cases}$$

$$m_2 = \frac{m v'_{1x}}{v'_{1x} - v'_{2x}} = \frac{238\cdot u \times \left(-2{,}56\cdot 10^5\,\frac{m}{s}\right)}{-2{,}56\cdot 10^5\,\frac{m}{s} - 1{,}50\cdot 10^7\,\frac{m}{s}} = 4\cdot u$$

$$m_1 = m - m_2 = 238\cdot u - 4\cdot u = 234\cdot u$$

1.1.5 Aplicaciones de las leyes de Newton del movimiento

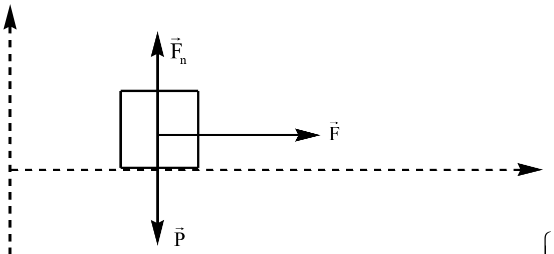
El movimiento de una partícula, bajo una fuerza constante, tiene la aceleración también constante. Además, analizando las ecuaciones siguientes, la velocidad siempre cambia en una dirección paralela a la fuerza aplicada, por lo que la trayectoria tiende hacia la dirección de la fuerza. Respecto al desplazamiento, si la fuerza es constante, es una combinación de dos vectores. Uno es la velocidad inicial y el otro la dirección de la fuerza aplicada. Si los dos vectores son paralelos el movimiento es rectilíneo y si no lo son estará en el plano determinado por los dos.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{neta}}{m} \quad \left.\begin{cases} \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \\ \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \end{cases}\right\} \begin{cases} \vec{v} = \vec{v}_0 + \dfrac{\vec{F}_{neta}}{m} t \\ \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \dfrac{1}{2}\dfrac{\vec{F}_{neta}}{m} t^2 \end{cases}$$

Ejercicios de aplicación de las leyes de Newton del movimiento:

1º) Supongamos que tiramos de un objeto, de masa 50 kg, con una fuerza horizontal de 100 N. Si el objeto está situado encima del hielo, en el que el rozamiento es prácticamente cero, determina la aceleración que experimenta.

Solución: Las tres fuerzas que actúan sobre el objeto son el **peso**, la **fuerza** de contacto ejercida por el hielo que es perpendicular y la **fuerza** de contacto de tiro. El objeto se mueve sobre el eje OX luego la resultante de las fuerzas sobre el eje OY es cero



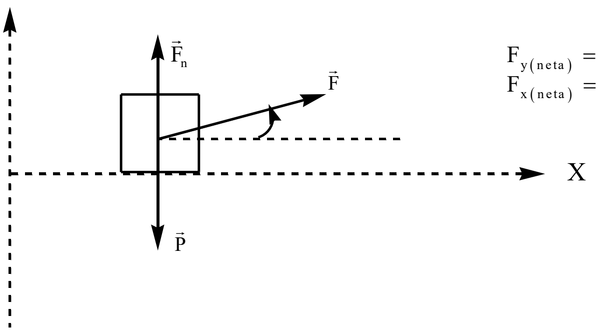
$$\vec{F}_{neta} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{F}_n = m\vec{a} \quad \begin{cases} F_{y(neta)} = -mg + F_n = 0 \Rightarrow F_n = mg \\ F_{x(neta)} = F_x = ma_x \Rightarrow a_x = \dfrac{F_x}{m} \end{cases}$$

$$\vec{F}_{neta} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{F}_n = m\vec{a} \quad \left.\begin{cases} F_{x(neta)} = F_x = ma_x \\ F_{y(neta)} = F_n - P = F_n - mg = ma_y = 0 \end{cases}\right\} \begin{cases} a_x = \dfrac{F_x}{m} = \dfrac{100\ \text{N}}{50\ \text{kg}} = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ F_n = P = mg = 50\,\text{kg} \times 9,8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 490\,\text{N} \end{cases}$$

2º) Supongamos que tiramos de un objeto, de masa 50 kg, con una fuerza de 150 N que forma un ángulo de 25º con la horizontal. Si el objeto está situado encima del hielo, en el que el rozamiento es prácticamente cero, determina la aceleración que experimenta y la fuerza normal ejercida por la superficie sobre el objeto.

Solución: Las tres fuerzas que actúan sobre el objeto son el peso, la fuerza de contacto ejercida por el hielo que es perpendicular y la fuerza de contacto de tiro que forma un ángulo de 25º con la horizontal.

$\vec{F}_{neta} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{F}_n = m\vec{a}$



$$F_{y(neta)} = F_y - P + F_n = F \cdot sen\,25^{o} - P + F_n = 0$$
$$F_{x(neta)} = F \cdot cos\,25^{o} = ma_x$$

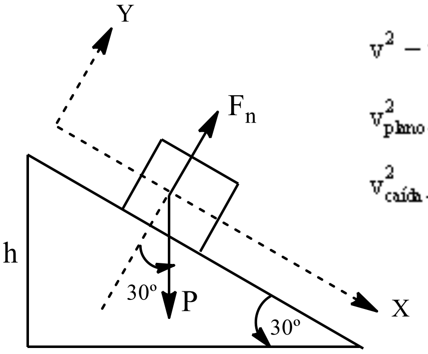
$$\vec{F}_{neta} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{F}_n = m\vec{a} \quad \begin{cases} F_{x(neta)} = F_x = F \cdot \cos 25^{o} = ma_x \\ F_{y(neta)} = F_n + F_y - P = F_n + F \cdot sen\,25^{o} - P = ma_y = 0 \end{cases}$$

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{F \cdot \cos 25^{o}}{m} = \frac{150\ \text{N} \times \cos 25^{o}}{50\ \text{kg}} = \frac{135,95\ \text{N}}{50\ \text{kg}} = 2,72\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

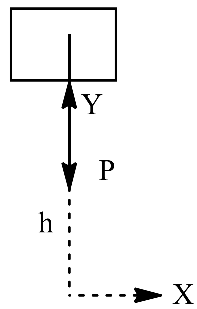
$$F_n = P - F \cdot sen\,25^{o} = 50\,\text{kg} \times 9,8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 150\,\text{N} \times sen\,25^{o} = 490\,\text{N} - 63,40\,\text{N} = 426,6\ \text{N}$$

3º) Sea un objeto, de masa 50 kg, situado en la parte superior de un plano inclinado que forma un ángulo de 30º con la horizontal. Cae sin rozamiento desde una altura de 10 m. a) Calcule la aceleración con la que cae y la fuerza normal ejercida por la superficie sobre el objeto; b) demuestre que la velocidad al final del plano inclinado es la misma que en la caída libre desde la altura vertical de 10 m.

Solución: Las dos fuerzas que actúan sobre el objeto son el peso, que está dirigido verticalmente hacia abajo, y la fuerza de contacto ejercida por el suelo del plano inclinado que es perpendicular a la superficie de contacto.



$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta s$$
$$v^2_{\text{plano-inclinado}} = 2a\Delta x = 2 \cdot g\,\text{sen}\,30^\circ \cdot \frac{h}{\text{sen}\,30^\circ} = 2 \cdot g \cdot h$$
$$v^2_{\text{caída-libre}} = 2a\Delta y = 2 \cdot g \cdot h = 2gh$$



Caída por el plano inclinado:

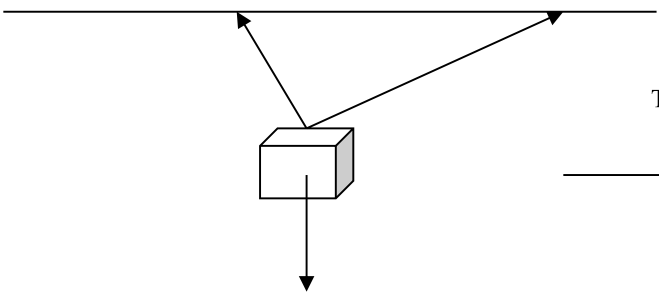
$$\vec{F}_{neta} = \vec{P} + \vec{F}_n = m\vec{a} \quad \begin{cases} F_{x(neta)} = P_x = P \cdot \text{sen}\,30^\circ = mg \cdot \text{sen}\,30^\circ = ma_x \\ F_{y(neta)} = F_n - P_y = F_n - P \cdot \cos 30^\circ = ma_y = 0 \end{cases}$$
$$a_x = g\,\text{sen}\,30^\circ = 9{,}8\,\tfrac{m}{s^2} \times \text{sen}\,30^\circ = 4{,}9\,\tfrac{m}{s^2}$$
$$F_n = P \cdot \cos 30^\circ = 50\,\text{kg} \times 9{,}8\,\tfrac{m}{s^2} \times \cos 30^\circ = 424{,}35\ \text{N}$$

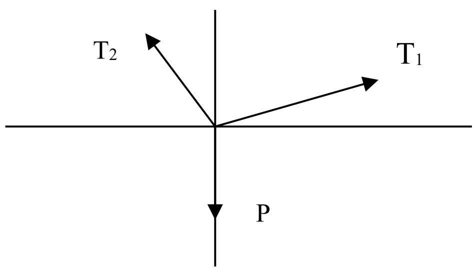
Velocidad al final del plano y con caída libre en la que solamente interviene la acción de la gravedad:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta s \quad \begin{cases} v^2_{\text{plano-inclinado}} = 2a\Delta x = 2 \cdot g\,\text{sen}\,30^\circ \cdot \dfrac{h}{\text{sen}\,30^\circ} = 2 \cdot g \cdot h \\ v^2_{\text{caída-libre}} = 2a\Delta y = 2 \cdot g \cdot h \end{cases}$$

4º) Supongamos un objeto, de masa 50 kg, que está colgado del techo sujeto a dos puntos y en equilibrio. Los ángulos de las cuerdas con el techo son de 30º y de 60º. Determina las tensiones de las cuerdas.

Solución: Sobre el objeto en equilibrio hay aplicadas tres fuerzas, su peso que está dirigido verticalmente hacia abajo y las dos tensiones de la cuerdas que forman con el techo ángulos de 30º y 60º, y con el eje x de 30º y 60º.





$$\vec{F}_{neta} = \vec{P} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \quad \begin{cases} F_{x(neta)} = T_1 \cos 30^\circ - T_2 \cos 60^\circ = ma_x = 0 \\ F_{y(neta)} = T_1\,\text{sen}\,30^\circ + T_2\,\text{sen}\,60^\circ - P = ma_y = 0 \end{cases}$$
$$T_1 \cos 30^\circ = T_2 \cos 60^\circ \quad \Rightarrow \quad T_2 = T_1 \frac{\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ}$$
$$T_1\,\text{sen}\,30^\circ + T_1 \frac{\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ}\text{sen}\,60^\circ = P \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{P}{\text{sen}\,30^\circ + \frac{\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} \cdot \text{sen}\,60^\circ} = \frac{P}{2} = 245\,\text{N} \quad \Rightarrow T_2 = 424{,}35\,\text{N}$$

5º) Un objeto, de masa m = 80 kg, está colocado sobre una balanza dentro de un ascensor. Determina la lectura de la balanza cuando: a) el ascensor sube verticalmente con una aceleración de valor $a_y = 2\ m/s^2$; b) el ascensor baja verticalmente con una aceleración $a_y = -1\ m/s^2$.

Solución: La lectura de la balanza es la magnitud de la fuerza normal ejercida por la balanza sobre el objeto. El objeto está en reposo relativo respecto del ascensor, él y el ascensor tienen la misma aceleración. Sobre el objeto actúan dos fuerzas, la fuerza de la gravedad, dirigida hacia abajo, y la fuerza normal desde la balanza dirigida hacia arriba. La suma de las dos nos dará la aceleración observada.

$$\vec{F}_{neta} = \vec{P} + \vec{F}_n = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad F_{y(neta)} = F_n - mg = ma_y$$

$$F_n = mg + ma_y \quad \begin{cases} F_n = 80\,\mathrm{kg} \times 9{,}8\,\frac{m}{s^2} + 80\,\mathrm{kg} \times 2\,\frac{m}{s^2} = 784\,\mathrm{N} + 160\,\mathrm{N} = 944\,\mathrm{N} \\ F_n = 80\,\mathrm{kg} \times 9{,}8\,\frac{m}{s^2} + 80\,\mathrm{kg} \times \left(-1\,\frac{m}{s^2}\right) = 784\,\mathrm{N} - 80\,\mathrm{N} = 704\,\mathrm{N} \end{cases}$$

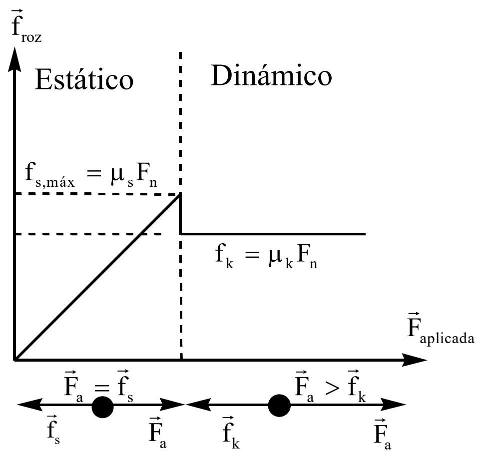
1.1.6 Fuerza de rozamiento o de fricción

Fricción estática: La fricción se debe al enlace o unión de moléculas entre dos superficies que están en contacto. Si consideramos una caja en reposo sobre el suelo y le aplicamos una fuerza pequeña, la caja puede que no se mueva debido a la fuerza de fricción estática, $\vec{f}_s$, que es una fuerza ejercida por el suelo sobre la caja, y equilibra la fuerza que se está aplicando. La fuerza de fricción estática, que se opone a la fuerza aplicada, puede ajustarse desde cero a algún valor máximo, $f_{s,máx}$, dependiendo de la fuerza que apliquemos. El valor de $f_{s,máx}$ es independiente del área de contacto y es proporcional a la fuerza normal ejercida por una superficie sobre otra: $f_{s,máx} = \mu_s F_n$. Donde μ_s es el coeficiente de fricción estático, una cantidad adimensional que depende de la naturaleza de las superficies en contacto. Si ejercemos una fuerza horizontal sobre la caja menor que $f_{s,máx}$, la fuerza de fricción se ajustará hasta equilibrar esta fuerza horizontal. Por lo que en general: $f_s \le \mu_s F_n$.

Fricción cinética: Si empujamos fuertemente una caja colocada sobre el suelo, la caja se deslizará sobre el suelo. Cuando la caja se está deslizando, continuamente enlaces moleculares se están formando y rompiendo, y pequeñas piezas de la superficie se están rompiendo. El resultado es una fuerza de fricción cinética, $\vec{f}_k$, también llamada fricción de deslizamiento, que se opone al movimiento. Para que la caja permanezca deslizándose con velocidad constante, debemos ejercer una fuerza sobre la caja que sea igual en magnitud y opuesta a la fuerza de fricción cinética ejercida por el suelo. El coeficiente de fricción cinética μ_k se define como la relación de las magnitudes de la fuerza de fricción cinética y la fuerza normal: $f_k = \mu_k F_n$. Donde μ_k depende de la naturaleza de las superficies en contacto. Experimentalmente se ha encontrado que $\mu_k < \mu_s$ y es aproximadamente constante para velocidades desde 0,01 m/s a 10 m/s.

En el caso de un coche que se encuentra en reposo, las fuerzas que actúan son la **fuerza peso** dirigido hacia en centro de la Tierra, las **fuerzas normales** aplicadas sobre las ruedas que equilibran el peso del coche. Cuando el coche comienza a moverse debido a la potencia suministrada por el motor al eje de las ruedas para que giren. Si la carretera no tuviera rozamiento la ruedas darían vueltas sin avanzar, pero cuando hay fricción la fuerza de fricción ejercida por la carretera sobre las ruedas se produce en el mismo sentido que la dirección de avance y proporciona la fuerza necesaria para acelerar el coche. Cuando las ruedas giran sin deslizar y la huella de la rueda tocando la carretera está en reposo relativo respecto de la carretera, es decir, la velocidad del punto sobre el neumático en contacto con el suelo es cero relativa al suelo. Por tanto la fuerza de fricción entre la carretera y la rueda es fricción estática. La mayor fuerza de fricción que las ruedas pueden ejercer sobre la carretera (y que la carretera puede ejercer sobre las ruedas) es $\mu_s F_n$.

Si la potencia suministrada por el motor es demasiado grande, las superficies en contacto deslizarán y las ruedas girarán. Entonces la fuerza que acelera el coche es la fuerza de fricción cinética, que es menor que la fuerza de fricción estática. Similarmente, cuando frenamos un coche para pararlo, la fuerza ejercida por la carretera sobre las ruedas puede ser fricción estática o fricción cinética, dependiendo de cómo apliquemos los frenos, si frenamos bruscamente las ruedas se bloquean, los neumáticos deslizarán a lo largo de la carretera y la fuerza de frenado será la fricción cinética. Cuando una rueda rígida gira a velocidad constante, sin deslizarse, a lo largo de una carretera horizontal, el neumático continuamente se deforma, y la banda de rodadura y la carretera están despegándose continuamente, por lo que se necesita una fuerza para mantenerla a velocidad constante. El **coeficiente de fricción de rodadura**, μ_r, es la relación de la fuerza necesaria para mantener una rueda girando a velocidad constante sobre una superficie a la fuerza normal ejercida sobre la rueda. Los valores típicos de μ_r son de 0,01 a 0,02 para neumáticos de caucho sobre hormigón y son de 0,001 a 0,002 para ruedas de acero sobre raíles de acero.



Valores de coeficientes de fricción

Materiales	μ_s	μ_k
Acero-acero	0,7	0,6
Latón-acero	0,5	0,4
Cobre-hierro	1,1	0,3
Vidrio-vidrio	0,9	0,4
Teflón-teflón	0,04	0,04
Teflón-acero	0,04	0,04
Caucho-hormigón seco	1,0	0,80
Caucho-hormigón húmedo	0,30	0,25
Cera de ski- nieve	0,10	0,05

Resumiendo:

1. Si el cuerpo no se mueve la fuerza de fricción estática es igual a la F aplicada.
2. La magnitud fuerza de fricción estática f_s tiene su valor máximo $f_{s(\text{máximo})} = \mu_s \cdot F_n$
3. Si el cuerpo comienza a deslizarse sobre la superficie la magnitud de la fuerza de fricción rápidamente decrece a f_k con el coeficiente de fricción cinética μ_k.
4. La dirección de f_s y de f_k es siempre paralela a la superficie y opuesta al movimiento deseado y F_n es perpendicular a la superficie.

1.1.6.1 Ejercicios de aplicación de las leyes de Newton con rozamiento

1º) Un objeto, de masa 0,5 kg, se mueve con rozamiento sobre una superficie horizontal con una velocidad de 4 m/s. Al dejar de tirar de él se para cuando ha recorrido 5 m. Determina el coeficiente de fricción cinética y la fuerza de rozamiento.

Solución: El objeto está sometido a tres fuerzas: el **peso**, la **fuerza** de contacto ejercida por el suelo que es perpendicular y la **fuerza de fricción** que se dirige en sentido contrario al movimiento.

$$\vec{F}_{neta} = \vec{P} + \vec{F}_n + \vec{f}_{roz,k} = m\vec{a} \quad \begin{cases} F_{x(neta)} = -f_{roz} = -\mu_k F_n = ma_x \\ F_{y(neta)} = F_n - P = ma_y = 0 \end{cases}$$

$$a_x = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot \Delta x} = \frac{0^2 - \left(4\,\frac{m}{s}\right)^2}{2 \times 5\text{ m}} = -1{,}6\,\frac{m}{s^2}$$

$$-f_{roz} = -\mu_k F_n = ma_x \quad \Rightarrow \quad \mu_k = -\frac{ma_x}{F_n} = -\frac{ma_x}{P} = -\frac{ma_x}{mg} = -\frac{a_x}{g} = -\frac{\left(-1{,}6\,\frac{m}{s^2}\right)}{9{,}8\,\frac{m}{s^2}} = 0{,}16$$

$$f_{roz} = \mu_k F_n = \mu_k P = 0{,}16 \times 0{,}5\text{ kg} \times 9{,}8\,\frac{m}{s^2} = 0{,}784\text{ N}$$

2º) Un objeto está en reposo sobre la superficie de un plano inclinado. El ángulo de inclinación se va aumentando gradualmente hasta que alcanza un valor crítico, después del cual el objeto empieza a caer. Determina el coeficiente de fricción estática.

Solución: El objeto está sometido a tres fuerzas: el **peso**, la **fuerza** de contacto ejercida por la superficie del plano inclinado y que es perpendicular y la **fuerza de fricción** estática que se dirige en sentido contrario al posible movimiento.

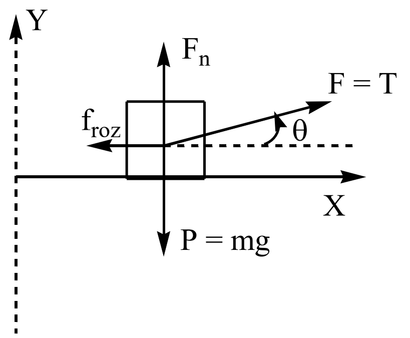
$$\vec{F}_{neta} = \vec{P} + \vec{F}_n + \vec{f}_{roz,s} = m\vec{a} = 0 \quad \begin{cases} F_x = P_x - f_{roz,s} = P \cdot \operatorname{sen}\theta - f_{roz,s} = ma_x = 0 \\ F_y = F_n - P_y = F_n - P \cdot \cos\theta = ma_y = 0 \\ f_{roz,s} = \mu_s F_n \end{cases}$$

$$f_{roz,s} = P_x = \mu_s F_n = \mu_s P_y \quad \Rightarrow \quad \mu_s = \frac{P_x}{P_y} = \frac{P \cdot \operatorname{sen}\theta}{P \cdot \cos\theta} = \tan\theta$$

3º) Con una cuerda tiramos de un trineo que está sobre la nieve en reposo. La cuerda forma un ángulo de 40º con la horizontal, la masa del trineo es de 50 kg y el coeficiente de fricción estático es $\mu_s = 0{,}2$ y el coeficiente de fricción cinético es $\mu_k = 0{,}15$. Determina: a) la fuerza mínima con la que hay que tirar para que el trineo se ponga en movimiento; b) la aceleración que adquiere si se le aplica una fuerza de 140 N. [a) 109,546 N, b) 0,9 m/s^2]

Solución: En primer lugar hemos de determinar si la fuerza de fricción es estática o cinética. Para ello comparamos la fuerza de fricción máxima con la fuerza horizontal ejercida por la tensión en la cuerda.

El trineo está sometido a cuatro fuerzas: el **peso**, la **fuerza** de contacto ejercida por el suelo que es perpendicular, la **fuerza de fricción** que se dirige en sentido contrario al movimiento y la **fuerza** con la que tiramos que forma un ángulo de 40º con la horizontal.



$$\vec{F}_{neta} = \vec{T} + \vec{P} + \vec{F}_n + \vec{f}_{roz} = m\vec{a}$$

$$\left.\begin{cases} F_{x(neta)} = T_x - f_{roz(s,máx)} = ma_x \\ F_{y(neta)} = F_n + T_y - P = ma_y = 0 \\ f_{roz(s,máx)} = \mu_s F_n = \mu_s \left(P - T_y\right) \end{cases}\right\} \quad T_x \geq f_{roz(s,máx)}$$

Para iniciar el movimiento:

$$\vec{F}_{neta} = \vec{T} + \vec{P} + \vec{F}_n + \vec{f}_{roz} = m\vec{a} \quad \left.\begin{cases} F_{x(neta)} = T_x - f_{roz(s,máx)} = ma_x \\ F_{y(neta)} = F_n + T_y - P = ma_y = 0 \\ f_{roz(s,máx)} = \mu_s F_n = \mu_s \left(P - T_y\right) \end{cases}\right\} \Rightarrow \quad T_x \geq f_{roz(s,máx)}$$

$$\left.\begin{cases} T_x = T \cdot \cos\theta \\ f_{roz(s,máx)} = \mu_s \left(P - T \operatorname{sen}\theta\right) = \mu_s P - \mu_s T \operatorname{sen}\theta \end{cases}\right\} \quad T \cdot \cos\theta \geq \mu_s P - \mu_s T \operatorname{sen}\theta$$

$$T \geq \frac{\mu_s P}{\cos\theta + \mu_s \operatorname{sen}\theta} = \frac{0{,}2 \times 490\,\mathrm{N}}{\cos 40º + 0{,}2 \times \operatorname{sen} 45º} = 109{,}546\,\mathrm{N}$$

Iniciado el movimiento:

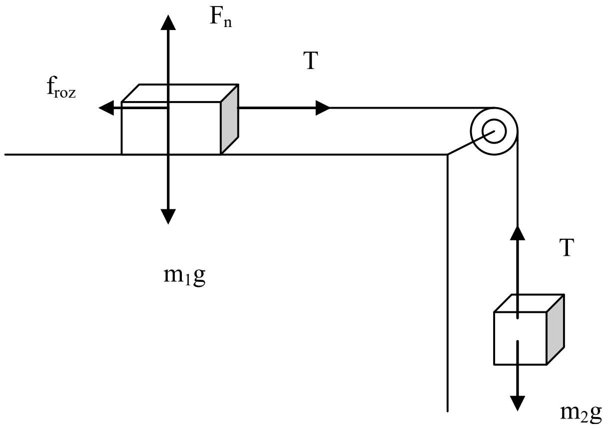
$$\vec{F}_{neta}=\vec{T}+\vec{P}+\vec{F}_n+\vec{f}_{roz}=m\vec{a}\quad \begin{cases} F_{x(neta)}=T_x-f_k=T\cos\theta-f_k=ma_x \\ F_{y(neta)}=F_n+T_y-P=F_n+T\,\text{sen}\,\theta-P=ma_y=0 \\ f_{s,máx}=\mu_k F_n=\mu_k\left(P-T\,\text{sen}\,\theta\right) \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} T_x=T\cdot\cos\theta=140\text{ N}\times\cos 40º=107,2\text{ N} \\ f_k=\mu_k F_n=\mu_k\left(P-T\,\text{sen}\,\theta\right)=0,15\times\left(490\text{ N}-90,0\text{ N}\right)=60,0\text{ N} \end{cases}\right\}\begin{cases} a_x=\dfrac{T_x-f_k}{m} \\ a_x=\dfrac{107,2\text{ N}-60,0\text{ N}}{50\text{ kg}}=0,9\,\frac{m}{s^2} \end{cases}$$

4º) La masa m_2 de la figura se ha ajustado para que el bloque de masa m_1 esté a punto de empezar a deslizarse. Si m_1 = 10 kg y m_2 = 5 kg determina el coeficiente de fricción estático μ_s del bloque de masa m_1 con el suelo. Posteriormente, le damos un pequeño impulso a la masa m_2 para que empiece a caer con una aceleración, determina la aceleración si el coeficiente de fricción cinético μ_k entre la masa m_1 y el suelo es 0,4. [μ_s = 0,5; a = 0,653 m/s^2]

Solución:

Aplicando la segunda ley de Newton a cada bloque, considerando el hecho de que la tensión de la cuerda T tiene la misma magnitud en todas las partes de la cuerda, $T_1 = T_2$, y que las aceleraciones tienen la misma magnitud porque la cuerda no se estira. Elegimos como sentido positivo del movimiento para m_1 hacia la derecha y para m_2 hacia abajo, es decir, la del movimiento de cada objeto es el sentido positivo del movimiento.



Para iniciar el movimiento:

$$\left.\begin{cases} m_2g-T=m_2a \\ T-f_{s,máx}=m_1a \\ F_n-m_1g=0 \\ f_{s,máx}=\mu_sF_n \end{cases}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases} a=0 \\ m_2g-T=0 \\ T-f_{s,máx}=0 \end{cases}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases} m_2g-f_{s,máx}=0 \\ m_2g-\mu_sF_n=0 \\ m_2g-\mu_sm_1g=0 \end{cases}\right\}\Rightarrow\quad \mu_s=\frac{m_2}{m_1}=0,5$$

Iniciado el movimiento:

$$\left.\begin{cases} m_2g-T=m_2a \\ T-f_k=m_1a \\ F_n-m_1g=0 \\ f_k=\mu_kF_n \end{cases}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases} m_2g-f_k=\left(m_2+m_1\right)a \\ m_2g-\mu_km_1g=\left(m_2+m_1\right)a \end{cases}\right\}$$

$$a=\frac{m_2g-\mu_km_1g}{m_2+m_1}=\frac{5\,\text{kg}\times 9,8\,\frac{m}{s^2}-0,4\times 10\,\text{kg}\times 9,8\,\frac{m}{s^2}}{5\,\text{kg}+10\,\text{kg}}=0,65\,\frac{m}{s^2}$$

Considerando el sistema formado por las dos masas ($m_1 + m_2$):

$$\vec{F}_{neta} = \vec{P}_2 + \vec{f}_{roz(k)} = (m_1 + m_2)\vec{a} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_2 - f_{roz(k)} = (m_1 + m_2)a \\ m_2 g - \mu_k m_1 g = (m_1 + m_2)a \end{array} \right\} \Rightarrow a = \frac{m_2 g - \mu_k m_1 g}{m_2 + m_1}$$

1.1.7 Dinámica del movimiento circular

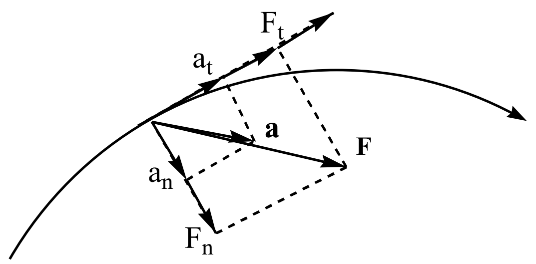
Newton demostró que una partícula moviéndose con velocidad constante en una circunferencia tiene una aceleración dirigida hacia el centro de la circunferencia, llamada **aceleración centrípeta**, requiere una fuerza neta dirigida hacia el centro de la circunferencia.

En el movimiento circular, como en todo movimiento curvilíneo, la aceleración está dirigida hacia la concavidad de la curva. La aceleración tiene dos componentes, la tangencial a la trayectoria y la normal a la trayectoria. La aceleración tangencial $\vec{a}_t$ nos mide los cambios en magnitud del módulo de la velocidad o celeridad. La aceleración normal $\vec{a}_n$ nos mide los cambios en la dirección de la velocidad.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v} = |\vec{v}|\vec{u}_t = v\vec{u}_t \\ \vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(v\vec{u}_t) = \dfrac{dv}{dt}\vec{u}_t + v\dfrac{d\vec{u}_t}{dt} \\ \vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_t = \dfrac{dv}{dt}\vec{u}_t \\ \vec{a}_n = \dfrac{v^2}{R}\vec{u}_n = \omega^2 R\vec{u}_n \end{array} \right.$$

La causa de cualquier aceleración es una fuerza neta en la dirección de la aceleración. Para aceleraciones centrípetas, esta fuerza se llama **fuerza centrípeta**. No es un nuevo tipo de fuerza, es el nombre para la fuerza necesaria para el movimiento circular.

La fuerza centrípeta se puede deber a una cuerda, un muelle, u otra fuerza de contacto como la fuerza normal de fricción; puede ser un tipo de fuerza de acción a distancia, como la fuerza gravitatoria, o puede ser una combinación de estas. La fuerza centrípeta siempre está dirigida hacia el centro del círculo.

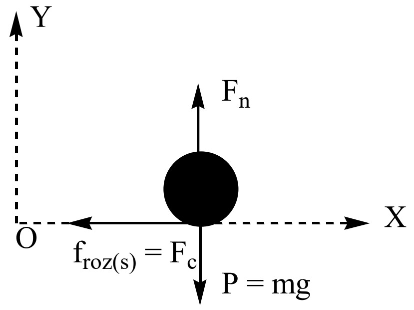


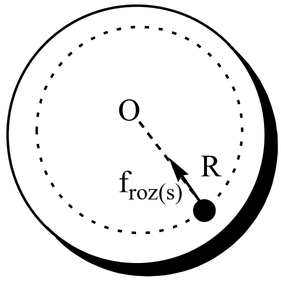
$$\vec{F}_{neta} = \vec{F}_t + \vec{F}_n = m\vec{a} \quad \left\{ \begin{array}{l} F_t = ma_t = m\dfrac{dv}{dt} \\ F_n = ma_n = m\dfrac{v^2}{R} \end{array} \right.$$

1.1.7.1 Problemas de dinámica en un movimiento circular

1º) Un coche está describiendo un círculo de radio 50 m en un tiempo de 16 s sin patinar. Determina: a) su velocidad promedio; b) la aceleración centrípeta, si consideramos que la velocidad v es constante; c) el valor mínimo del coeficiente de fricción estática considerando que la velocidad es constante.

Solución: Tomando como referencia el sistema inercial situado en el origen OXY, se observa que el coche está dando vueltas y que sobre él actúan tres fuerzas: P (el peso), F_n (la fuerza normal) y $f_{roz(s)}$ (la fuerza de fricción estática) que proporciona la fuerza centrípeta. Mientras mayor sea la velocidad con la que viaja el coche mayor será la fuerza centrípeta para mantenerlo en la trayectoria. Elegimos como dirección positiva la vertical hacia arriba y la dirección radial hacia fuera.



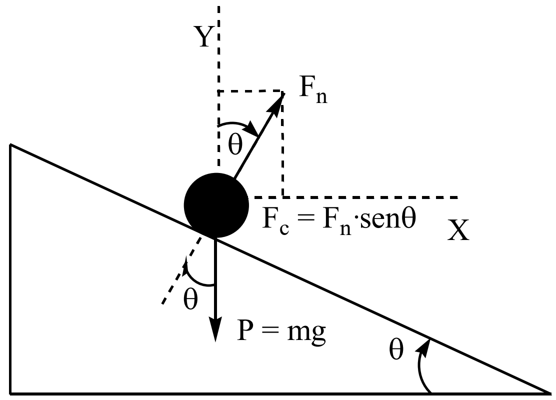


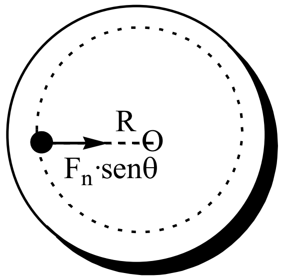
$$v_m = \omega R = \frac{2\pi}{T} R = \frac{2\pi}{16\,s} \times 50\,m = 19{,}6\,\tfrac{m}{s} \quad \Rightarrow \quad a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(19{,}6\,\tfrac{m}{s}\right)^2}{50\,m} = 7{,}71\,\tfrac{m}{s^2}$$

$$\vec{F}_{neta} = m\vec{a} \quad \left\{ \begin{array}{l} F_{x(centrípeta)} = -f_{roz(s,máx)} = -ma_c \\ F_{y(neta)} = F_n - P = F_n - mg = 0 \\ f_{roz(s,máx)} = \mu_s F_n = \mu_s mg \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} f_{roz(s,máx)} = ma_c \\ \mu_s mg = m\dfrac{v^2}{r} \end{array} \right\} \quad \mu_s \geq \frac{v^2}{gr} = 0{,}78$$

2º) Determina la inclinación que debe tener una carretera en una curva de radio 100 m, si la velocidad máxima del vehículo es de 72 km/h y no hay rozamiento. Posteriormente, determina la nueva velocidad máxima, para la inclinación obtenida, si consideramos la fuerza de rozamiento estático con un coeficiente de 0,3.

Solución: Como referencia el sistema inercial situado en el origen OXY, se observa que el coche está dando vueltas y que sobre él actúan dos fuerzas: P (el peso) y F_n (la fuerza normal). Como la carretera está inclinada, tiene peralte, la fuerza normal tiene componente horizontal que suministra la fuerza centrípeta necesaria.



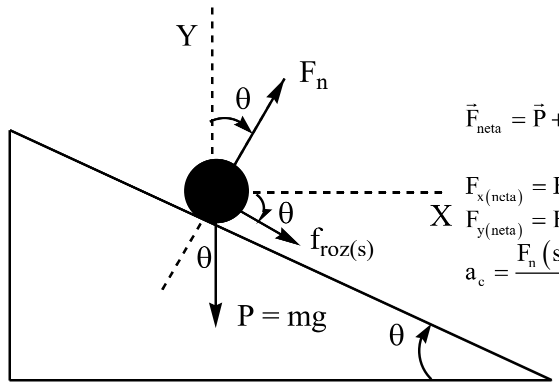


$$\vec{F}_{neta} = \vec{P} + \vec{F}_n = m\vec{a} \quad \left\{ \begin{array}{l} F_{x(neta)} = F_c = F_n \operatorname{sen}\theta = ma_c \\ F_{y(neta)} = F_n \cos\theta - mg = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} F_n \operatorname{sen}\theta = ma_c \\ \dfrac{mg}{\cos\theta} \operatorname{sen}\theta = ma_c \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} g\tan\theta = a_c \\ a_c = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{\left(20\,\tfrac{m}{s}\right)^2}{100\,m} = 4\,\tfrac{m}{s^2} \end{array} \right.$$

$$g\tan\theta = a_c \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{a_c}{g} = \frac{4\,\tfrac{m}{s^2}}{9{,}8\,\tfrac{m}{s^2}} = 0{,}408 = \frac{v^2}{gR} \quad \Rightarrow \quad \theta = 22{,}20^{o}$$

El ángulo de peralte de una carretera, θ, depende de v y R, pero no de la masa m; el ángulo θ se incrementa cuando lo hace v y decrece con el incremento de R.

Si la velocidad del vehículo es mayor que $v_0 = \sqrt{Rg\tan\theta}$, la carretera ejercerá una fuerza de fricción hacia abajo inclinada en el plano. Esta fuerza tiene una componente horizontal hacia adentro, que proporciona la fuerza centrípeta adicional necesaria para que el coche no deslice. **En el caso de que haya rozamiento**: el diagrama incluye la fuerza de rozamiento estática.



$$\vec{F}_{neta} = \vec{P} + \vec{F}_n + \vec{f}_{roz(s)} = m\vec{a} \quad \begin{cases} F_{x(neta)} = F_c = F_n \operatorname{sen}\theta + f_{roz(s)} \cos\theta = ma_c \\ F_{y(neta)} = F_n \cos\theta - P - f_{roz(s)} \operatorname{sen}\theta = 0 \\ f_{roz(s)} = \mu_s F_n \end{cases}$$

$$F_{x(neta)} = F_c = F_n \operatorname{sen}\theta + \mu_s F_n \cos\theta = F_n\left(\operatorname{sen}\theta + \mu_s \cos\theta\right) = ma_c$$

$$F_{y(neta)} = F_n \cos\theta - P - \mu_s F_n \operatorname{sen}\theta = F_n\left(\cos\theta - \mu_s \operatorname{sen}\theta\right) - mg = 0$$

$$a_c = \frac{F_n\left(\operatorname{sen}\theta + \mu_s\cos\theta\right)}{m} = \frac{mg\left(\operatorname{sen}\theta + \mu_s\cos\theta\right)}{\left(\cos\theta - \mu_s \operatorname{sen}\theta\right)m} = g\frac{\left(\operatorname{sen}\theta + \mu_s\cos\theta\right)}{\left(\cos\theta - \mu_s \operatorname{sen}\theta\right)} = \frac{v^2}{R}$$

$$\vec{F}_{neta} = \vec{P} + \vec{F}_n + \vec{f}_{roz(s)} = m\vec{a} \quad \begin{cases} F_{x(neta)} = F_c = F_n \operatorname{sen}\theta + f_{roz(s)} \cos\theta = ma_c \\ F_{y(neta)} = F_n \cos\theta - P - f_{roz(s)} \operatorname{sen}\theta = 0 \\ f_{roz(s)} = \mu_s F_n \end{cases}$$

$$F_{x(neta)} = F_c = F_n \operatorname{sen}\theta + \mu_s F_n \cos\theta = F_n\left(\operatorname{sen}\theta + \mu_s \cos\theta\right) = ma_c$$

$$F_{y(neta)} = F_n \cos\theta - P - \mu_s F_n \operatorname{sen}\theta = F_n\left(\cos\theta - \mu_s \operatorname{sen}\theta\right) - mg = 0$$

$$a_c = \frac{F_n\left(\operatorname{sen}\theta + \mu_s\cos\theta\right)}{m} = \frac{mg\left(\operatorname{sen}\theta + \mu_s\cos\theta\right)}{\left(\cos\theta - \mu_s \operatorname{sen}\theta\right)m} = g\frac{\left(\operatorname{sen}\theta + \mu_s\cos\theta\right)}{\left(\cos\theta - \mu_s \operatorname{sen}\theta\right)}$$

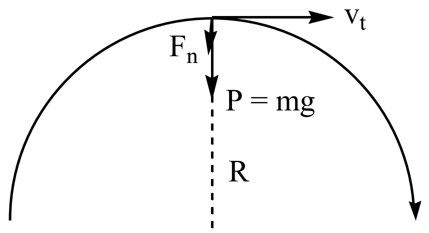
$$a_c = 9{,}8\,\tfrac{m}{s^2} \times \frac{\left(\operatorname{sen} 22{,}2^o + 0{,}3 \times \cos 22{,}2^o\right)}{\left(\cos 22{,}2^o - 0{,}3 \times \operatorname{sen} 22{,}2^o\right)} = 9{,}8\,\tfrac{m}{s^2} \times 0{,}807 = 7{,}9\,\tfrac{m}{s^2} = \frac{v^2}{R}$$

$$v^2 = a_c \cdot R = 7{,}9\,\tfrac{m}{s^2} \times 100\,m = 790\,\tfrac{m^2}{s} \quad \Rightarrow \quad v = 28{,}11\,\tfrac{m}{s} = 101{,}2\,\tfrac{km}{h}$$

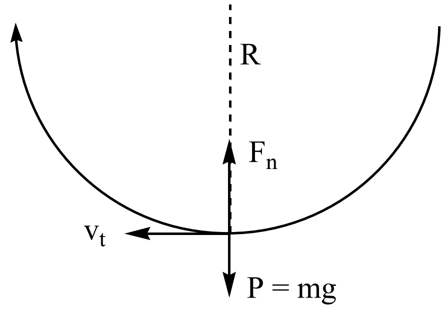
3º) Supongamos que estamos volteando un cubo o balde agua en un movimiento vertical de radio r. La velocidad del balde es v_t en la parte más alta del círculo. a) Encuentra la fuerza ejercida sobre el agua por el balde en la parte más alta del círculo. b) Determina el valor mínimo de v_t para que el agua permanezca en el cubo. c) Determina la fuerza ejercida por el cubo sobre el agua en la parte más baja del círculo donde la velocidad es v_b.

Solución: La referencia es el sistema inercial situado en el origen OXY, desde el que se sostiene el cubo dando vueltas, sobre el que actúan dos fuerzas: P (el peso) y F_n (la fuerza normal del cubo sobre el agua). Aplicamos la segunda ley de Newton para encontrar la fuerza ejercida por el cubo. Como el agua se mueve en un camino circular tiene una aceleración centrípeta hacia el centro del círculo. Elegimos la dirección positiva del eje y hacia arriba, entonces la aceleración en la parte superior es negativa y en la parte inferior positiva.

Cubo arriba

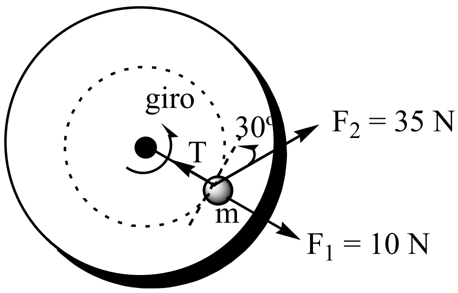


Cubo abajo



$$\text{Cubo arriba}\begin{Bmatrix} \vec{F}_{neta}=\vec{P}+\vec{F}_n=m\vec{a} \\ F_{neta}=-mg-F_n=-ma_c \\ mg+F_n=ma_c=m\dfrac{v_t^2}{R} \\ \text{Mínimo } v_t \Rightarrow F_n=0 \\ v_t^2=Rg \end{Bmatrix} \quad \text{Cubo abajo}\begin{Bmatrix} \vec{F}_{neta}=\vec{P}+\vec{F}_n=m\vec{a} \\ F_{neta}=-mg+F_n=ma_c \\ F_n=ma_c+mg \end{Bmatrix}$$

4º) Un objeto de masa m = 5 kg está originalmente en reposo sobre una superficie horizontal. Sobre el objeto actúa una fuerza radial F_1 = 10 N y una fuerza F_2 = 35 N, siempre dirigida a 30º desde la tangente al camino que recorre. La cuerda que une el objeto con el eje de giro está a una distancia de 1,20 m y puede soportar una tensión de T = 150 N. Calcule: a) el tiempo que tardará en romperse la cuerda; b) la longitud recorrida por la masa hasta que la cuerda se rompe. Dato: g = 9,8 m/s^2.



Solución: La referencia es el sistema inercial situado en el origen, donde está el eje de giro en el que se apoya el objeto de masa m. Sobre el objeto actúan varias fuerzas: P, F_n, T, F_1 y F_2. La resultante de todas ellas hace que el objeto se mueve girando alrededor del origen y va aumentando su velocidad debido a la fuerza tangencial que es la causa de la aceleración tangencial. El aumento de velocidad del objeto supone que aumente el valor de la aceleración centrípeta hasta que se alcance el límite permitido por la Tensión de la cuerda, cuando se supere la cuerda se romperá ya que la Tensión no será capaz de mantener el objeto en la trayectoria.

$$\vec{F}_{neta}=\vec{F}_c+\vec{F}_t=m\vec{a}\quad\begin{cases} F_c=-T+F_1+F_2\cdot\operatorname{sen}30^\circ=-150\,N+10\,N+35\,N\cdot\operatorname{sen}30^\circ=-122,5\,N=ma_c \\ F_t=F_2\cdot\cos 30^\circ=35\,N\cdot\cos 30^\circ=30,31\,N=ma_t \end{cases}$$

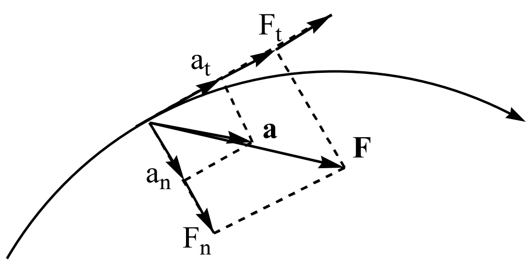
$$a_{c(\text{máxima})}=\frac{F_c}{m}=\frac{-122,5\,N}{5\,kg}=-24,5\,\tfrac{m}{s^2}=\frac{v_{\text{máxima}}^2}{R}\quad\Rightarrow\quad v_{\text{máxima}}=\sqrt{a_c R}=\sqrt{24,5\,\tfrac{m}{s^2}\times 1,2\,m}=5,42\,\tfrac{m}{s}$$

$$a_t=\frac{F_t}{m}=\frac{30,31\,N}{5\,kg}=6,06\,\tfrac{m}{s^2}\quad\Rightarrow\quad v=v_0+a_t t\quad\Rightarrow\quad t=\frac{v_{\text{máxima}}-v_0}{a_t}=\frac{5,42\,\tfrac{m}{s}-0}{6,06\,\tfrac{m}{s^2}}=0,89\,s$$

$$\Delta s=v_0 t+\tfrac{1}{2}a_t t^2=0+\tfrac{1}{2}\times 6,06\,\tfrac{m}{s^2}\times(0,89\,s)^2=2,40\,m$$

1.1.7.2 Concepto de momento angular y de momento de una fuerza

Una partícula experimenta un movimiento curvilíneo cuando la fuerza resultante forma un ángulo con la velocidad. Recordando que la aceleración es siempre paralela a la fuerza. La aceleración tendrá una componente paralela a la velocidad, que cambia su magnitud, y otra componente perpendicular a la velocidad que nos expresa los cambios en la dirección del movimiento.

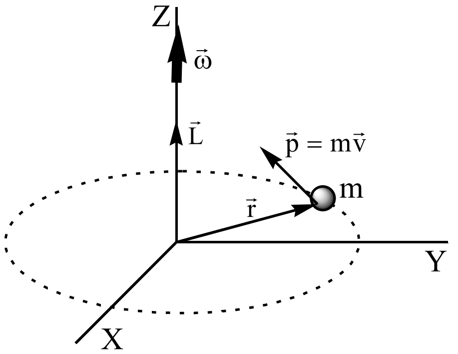


$$\vec{F}=m\vec{a}\quad\begin{cases} F_t=ma_t=m\dfrac{dv}{dt} \\ F_n=ma_n=m\dfrac{v^2}{R}=m\omega^2 R \end{cases}$$

$$L=mRv_t$$

En el movimiento circular o curvilíneo no se conserva el momento lineal, ya que al ser una magnitud vectorial la dirección del vector $\vec{p} = m\vec{v}$, cambia cuando lo hace la dirección del movimiento. En los movimientos circulares lo que se conserva es otra magnitud llamada momento angular.

<u>Momento angular</u>: Sea una partícula que se mueve en un círculo de radio r con una velocidad v. Definimos el momento angular de la partícula L como $L = r \cdot mv_t$. Donde v_t es la componente tangencial del vector velocidad. El momento angular tiene el mismo signo como v_t, es positivo si el movimiento es contrario a las agujas del reloj.



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad \left\{ \begin{aligned} \vec{r} &= r_x \vec{i} + r_y \vec{j} \\ \vec{p} &= p_x \vec{i} + p_y \vec{j} \end{aligned} \right\}$$

$$\vec{L} = \left(r_x \vec{i} + r_y \vec{j} \right) \times \left(p_x \vec{i} + p_y \vec{j} \right) = \left(r_x p_y - r_y p_x \right) \vec{k}$$

$$\left| \vec{L} \right| = \left| \vec{r} \right| \left| \vec{p} \right| \operatorname{sen} 90^\circ = rp = rmv = rm\omega r = mr^2\omega = I\omega$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad \Rightarrow \quad \left| \vec{L} \right| = \left| \vec{r} \right| \left| \vec{p} \right| \operatorname{sen} \theta \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{r} \perp \vec{p} \\ L = rp \operatorname{sen} 90^\circ = rp = rmv = rm\omega r = mr^2\omega = I\omega \end{array} \right.$$

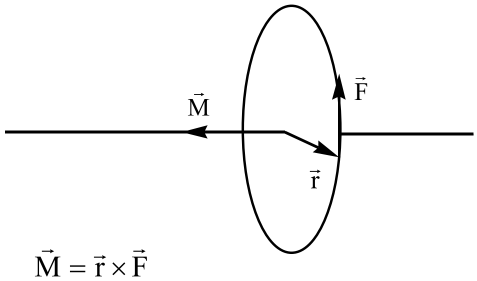
$$L \equiv kg \cdot \frac{m^2}{s} = kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot m \cdot s = N \cdot m \cdot s = J \cdot s$$

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{r} &= r_x \vec{i} + r_y \vec{j} \\ \vec{p} &= p_x \vec{i} + p_y \vec{j} \end{aligned} \right\} \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & 0 \\ p_x & p_y & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} \left(r_x p_y - r_y p_x \right) = \left(r_x p_y - r_y p_x \right) \vec{k}$$

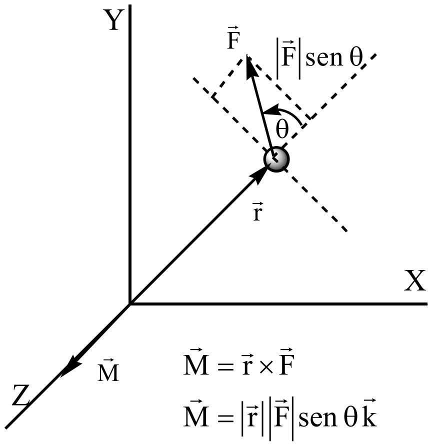
La magnitud $I = mr^2$ se llama momento de inercia del cuerpo con respecto al eje de rotación, o la inercia rotacional.

La componente radial de la fuerza F_n es la causante de la aceleración centrípeta del movimiento. La componente paralela a la trayectoria F_t es la causante de que la partícula aumente o disminuya la velocidad. Si hay fuerza tangencial el momento angular de la partícula cambia cuando lo hace v_t. Si no hay fuerza tangencial, $F_t = 0$, el momento angular permanece constante. Por lo que podemos establecer la **ley de conservación del momento angular** diciendo: El momento angular de una partícula en un movimiento circular no cambia a menos que exista una fuerza tangencial neta sobre la partícula.

<u>Momento de una fuerza</u>: Cuando una fuerza actúa sobre un cuerpo, este no sólo se mueve en la dirección de la fuerza sino que también lo hace alrededor de un punto. Considera la fuerza F actuando sobre una partícula A. Supongamos que el efecto de la fuerza es mover la partícula alrededor de O. La experiencia nos dice que el efecto de rotación de F se incrementa con la distancia perpendicular o distancia de la palanca OB, desde el centro de rotación O a la línea de acción de la fuerza F. La magnitud física que lo define se llama par de torsión o momento del par



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$
$$\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{r}\right|\left|\vec{F}\right| \operatorname{sen} 90^\circ = \left|\vec{r}\right|\left|\vec{F}\right|$$



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$
$$\vec{M} = \left|\vec{r}\right|\left|\vec{F}\right| \operatorname{sen} \theta \,\vec{k}$$

1.1.7.3 Relación entre el momento de una fuerza y el momento angular

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F}^{ext} = 0 + \vec{r} \times \vec{F}^{ext} = \vec{M} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

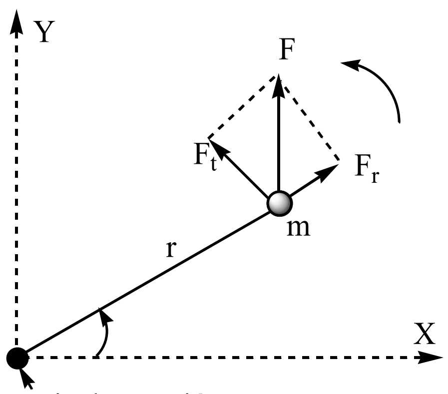
1.1.7.4 Principio de conservación del momento angular

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}^{ext} = 0 \quad \left\{\vec{r} \parallel \vec{F}^{ext}\right\} \quad \vec{M} = 0 = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \begin{Bmatrix} L = cte \\ L_i = L_f \end{Bmatrix} \quad \begin{cases} r_i m v_i = r_f m v_f \\ m r_i^2 \omega_i = m r_f^2 \omega_f \end{cases}$$

Si el momento neto de las fuerzas actuantes sobre una partícula es cero, el vector momento angular permanece constante.

1.1.7.5 Segunda ley de Newton para la rotación

El momento de una fuerza puede causar la rotación de un cuerpo, como cuando usamos el momento de una fuerza para rotar una puerta. Si una fuerza se aplica sobre una partícula, m, unida a una varilla de longitud r. La varilla puede rotar alrededor de un eje de rotación que es perpendicular al plano de la página.



$$L = rp \begin{cases} L = rmv = mr^2\omega = I\omega \\ M = \dfrac{dL}{dt} = I\alpha \end{cases}$$

$$M = F_t r \begin{cases} F_t = m a_t \\ M = m a_t r = m(\alpha r) r = m r^2 \alpha = I\alpha \end{cases}$$

La partícula puede moverse, siguiendo una trayectoria circular, debido a la componente tangencial de la fuerza (la componente tangente al camino circular) que la acelera.

$$L = rp = rmv = mr^2\omega = I\omega \quad \Rightarrow \quad M = \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega) = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$
$$M = F_t r = m a_t r = m(\alpha r) r = m r^2 \alpha = I\alpha$$

La magnitud $I = mr^2$ se llama momento de inercia del cuerpo con respecto al eje de rotación, o la inercia rotacional.

1.1.7.6 Relación entre las magnitudes para el movimiento de translación y de rotación

En la siguiente tabla se expone la relación entre las magnitudes para el movimiento de translación y de rotación:

Relación entre las magnitudes para el movimiento de traslación y de rotación	
Traslación de partícula de masa m	**Rotación de partícula de masa m**
Momento lineal una partícula: $\vec{p} = m\vec{v}$	Momento angular una partícula: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
Momento lineal sistema: $\vec{p}_{total} = M\vec{V}_{CM}$	Momento angular sistema: $L = rp = rmv = mr^2\omega = I\omega$
Segunda ley de Newton: $\vec{F}_{neta} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	Segunda ley de Newton: $\vec{M}_{neto} = \vec{r} \times \vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
Ley de conservación del momento lineal para sistema aislado y cerrado: $\vec{F}_{neta} = \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = cte.$	Ley de conservación del momento angular para sistema aislado y cerrado: $\vec{M}_{neto} = \vec{r} \times \vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = cte.$

1.1.7.7 Ejercicios de aplicación del principio de conservación del momento angular

1) Un satélite gira alrededor de un planeta siguiendo una trayectoria elíptica, en el perigeo (punto más próximo) a 6.000 km su velocidad es de 8.000 m/s. Determina la velocidad en el apogeo (punto más alejado) que está a 24.000 km.

Solución:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_{gravedad} = 0 \quad \left\{ \vec{r} \parallel \vec{F}_g \right\} \quad \vec{M} = 0 = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \left\{ L = cte \right\} \quad \left\{ r_p m v_p = r_a m v_a \right.$$

$$v_a = \frac{r_p m v_p}{r_a m} = \frac{r_p}{r_a} v_p = \frac{6.000\,km}{24.000\,km} \times 8.000\,\tfrac{m}{s} = 2.000\,\tfrac{m}{s}$$

2) El Sol tiene un radio de $6{,}96 \cdot 10^8$ m y un período de rotación de 25,3 días. Si colapsase, sin pérdida de masa, hasta una estrella neutrónica su radio pasaría a ser de $5{,}0 \cdot 10^3$ m. Determina el nuevo período de rotación del Sol.

Solución:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_{ext} = 0 \quad \left\{ L = cte \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} mr_i^2 \omega_i = mr_f^2 \omega_f \\ mr_i^2 \dfrac{2\pi}{T_i} = mr_f^2 \dfrac{2\pi}{T_f} \end{array} \right\} \quad T_f = \frac{r_f^2}{r_i^2} T_i$$

$$T_f = \frac{r_f^2}{r_i^2} T_i = \frac{\left(5 \cdot 10^3\,m\right)^2}{\left(6{,}96 \cdot 10^8\,m\right)^2} \times 25{,}3\,días = 1{,}30 \cdot 10^{-9}\,días = \frac{1{,}30 \cdot 10^{-9}\,días}{\frac{1\,día}{86.400\,s}} = 0{,}112\,ms$$

3) Un patinador sobre hielo está girando en un punto, con una masa de 6 kg en cada mano. Cuando está girando a 2 rev/min las manos se encuentran, una opuesta a la otra del cuerpo, y separadas a una distancia de 150 cm. Si acercase las manos, siempre una opuesta a la otra, hasta una distancia de 50 cm, determina la nueva velocidad de giro.

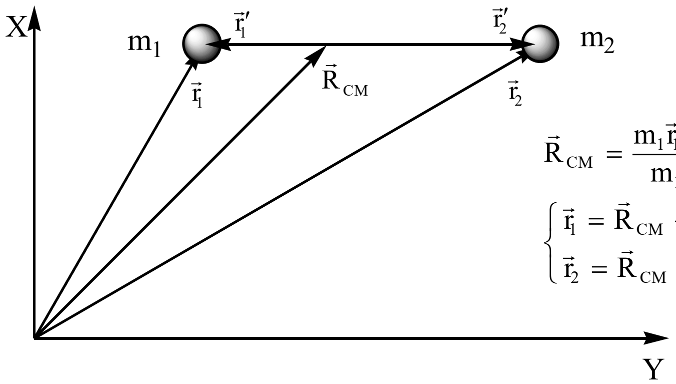
Solución: Las dos masas son iguales, se mueven en círculos con el mismo radio (75 cm y 25 cm) y tienen la misma velocidad tangencial. Por lo que el momento angular es el doble que el de una masa. Aplicando la conservación del momento angular por no haber fuerza externa neta:

$$\left.\begin{cases} L_f = L_i \\ 2mr_f v_{tf} = 2mr_i v_{ti} \end{cases}\right\} \left.\begin{cases} v_t = \omega r \\ 2mr_f^2 \omega_f = 2mr_i^2 \omega_i \end{cases}\right\} \omega_f = \frac{r_i^2}{r_f^2}\omega_i = \left(\frac{0,75\text{ m}}{0,25\text{ m}}\right)^2 \times 2\,\frac{\text{rev}}{\text{min}} = 18\,\frac{\text{rev}}{\text{min}}$$

1.2 Dinámica de un sistema de dos partículas

1.2.1 Concepto de centro de masas de un sistema de dos partículas m_1 y m_2

Un sistema de partículas es un conjunto de partículas sometidas a unas **fuerzas interiores**, entre ellas, y a unas **ligaduras** que constriñen el movimiento del sistema. Un ejemplo de sistema con ligaduras es el sólido rígido que se caracteriza porque las distancias entre las partículas son inalterables. Un sistema de partículas puede interaccionar con otro y a esas interacciones se les llama **fuerzas exteriores** del Sistema. Si las fuerzas exteriores son cero el sistema se dice que está aislado.



$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M}$$

$$\begin{Bmatrix} \vec{r}_1 = \vec{R}_{CM} + \vec{r}_1\,' \\ \vec{r}_2 = \vec{R}_{CM} + \vec{r}_2\,' \end{Bmatrix} \quad m_1\vec{r}_1\,' + m_2\vec{r}_2\,' = 0$$

Consideremos un sistema de dos partículas **m₁** y **m₂** que respecto a un **sistema de referencia inercial (OXY)** tienen sus vectores de posición de componentes respectivas (r_{1x}; r_{1y}) y (r_{2x}; r_{2y}). **Se define el centro de masas del sistema** de dos partículas como aquel punto cuyo vector de posición, respecto del sistema inercial OXY exterior al sistema de partículas, viene dado por:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \left.\begin{cases} R_{x(CM)} = \dfrac{m_1 r_{1x} + m_2 r_{2x}}{m_1 + m_2} \\ R_{y(CM)} = \dfrac{m_1 r_{1y} + m_2 r_{2y}}{m_1 + m_2} \end{cases}\right\} \begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{R}_{CM} + \vec{r}_1\,' \\ \vec{r}_2 = \vec{R}_{CM} + \vec{r}_2\,' \end{cases}$$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1\left(\vec{R}_{CM} + \vec{r}_1\,'\right) + m_2\left(\vec{R}_{CM} + \vec{r}_2\,'\right)}{m_1 + m_2} \quad \begin{cases} (m_1 + m_2)\vec{R}_{CM} = (m_1 + m_2)\vec{R}_{CM} + m_1\vec{r}_1\,' + m_2\vec{r}\,' \\ m_1\vec{r}_1\,' + m_2\vec{r}_2\,' = 0 \end{cases}$$

1.2.2 Movimiento de una masa M constituida por dos partículas m_1 y m_2: El movimiento de un sistema de partículas es más sencillo si lo estudiamos en función del centro de masas. Para ello, consideremos el más simple, que es un sistema de dos partículas de masas distintas m_1 y m_2.

Cinemática del movimiento: La **velocidad**, la **aceleración** y la **posición** del centro de masas en cualquier instante vienen dadas por

$$\vec{V}_{CM} = \frac{d\vec{R}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}\right) = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = \frac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\begin{cases} \vec{V}_{(CM)} = \vec{V}_{0(CM)} + \vec{a}_{CM}t \\ \vec{R}_{(CM)} = \vec{R}_{0(CM)} + \vec{V}_{0(CM)}t + \frac{1}{2}\vec{a}_{CM}t^2 \end{cases}$$

<u>Momento lineal de un sistema de partículas m_1 y m_2</u>: El momento lineal de un sistema de dos partículas, de masas distintas m_1 y m_2, relativo al sistema inercial OXYZ (llamado de laboratorio) es la suma de los momentos lineales de cada una de las partículas.

$$\vec{p}_{total} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{V}_{CM} = M\vec{V}_{CM}$$

El momento lineal de un sistema de partículas vemos que es igual al producto de la masa total del sistema por la velocidad del centro de masas. Por lo que es el mismo que el de una partícula ideal de masa igual a la masa total del sistema, de posición la del centro de masas, y que se mueva de la misma forma que éste.

El momento lineal de un sistema de partículas, tomando como referencia el sistema Centro de Masas del propio sistema de partículas, es siempre cero.

$$m_1\vec{r}_1' + m_2\vec{r}_2' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(m_1\vec{r}_1' + m_2\vec{r}_2') = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' = 0 \qquad \{\vec{p}_1' + \vec{p}_2' = 0$$

Dinámica del movimiento: Sobre cada partícula actúan dos fuerzas la externa, suma de todas las fuerzas externas, y la interna, debida a la otra partícula. La fuerza total sobre cada partícula de masas distintas m_1 y m_2 es igual a

$$\left\{\text{Sobre } m_1\text{:} \quad \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{12} = \frac{d\vec{p}_1}{dt}\right\}\left\{\text{Sobre } m_2\text{:} \quad \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{21} = \frac{d\vec{p}_2}{dt}\right\} \quad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

La fuerza total sobre el sistema se caracteriza porque la suma de las fuerzas internas es cero:

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{21} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \frac{d\vec{p}_{total}}{dt} \\ \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{21} = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_2^{ext} - \vec{F}_{12} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}^{externa} \end{array}\right\} \quad \sum_{i=1}^{n}\vec{F}^{externa} = \frac{d\vec{p}_{total}}{dt}$$

La suma de las fuerzas externas es igual a la variación del momento lineal del sistema con respecto del tiempo:

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}^{externa} = \frac{d\vec{p}_{total}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = \frac{d}{dt}\left(M\vec{V}_{CM}\right) = M\vec{a}_{CM}$$

Al aplicarle una fuerza externa al sistema, éste se mueve como si toda la masa estuviera concentrada en el Centro de Masas.

<u>1.2.3 Principio de conservación del momento lineal de un sistema de partículas</u>

"*Si un sistema está aislado y cerrado, es decir, la suma de las fuerzas externas es cero y no pueden entrar ni salir partículas del sistema, entonces el momento lineal o la cantidad de movimiento del sistema permanece constante con respecto al tiempo*".

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}^{ext}=0 \quad \left\{\frac{d}{dt}(\vec{p}_{total})=\frac{d}{dt}(\vec{p}_1+\vec{p}_2)=0 \quad \Rightarrow\right. \\ (\vec{p}_1+\vec{p}_2)_i=(\vec{p}_1+\vec{p}_2)_f\end{array}\right\} \vec{p}_{total}=\vec{p}_1+\vec{p}_2=\text{cte.}$$

El principio de conservación del momento lineal es una ley general, más que las leyes de Newton, ya que es válido en el mundo subatómico y para partículas a altas velocidades (teoría general de la relatividad).

"Si el momento lineal total es constante, la velocidad del centro de masas también lo es y la aceleración del centro de masas será cero".

1.2.4 Análisis de la 2ª ley de Newton aplicada a un sistema de partículas

- En la suma vectorial de todas las fuerzas externas que actúan sobre el sistema hay que tener mucho cuidado en no incluir las fuerzas internas que son las que ejerce una parte del sistema sobre otra parte.

- La masa total del sistema es la suma $M = m_1 + m_2$. Consideramos que en el sistema no entra ni sale masa cuando se mueve, es decir, la masa es constante. **El sistema es cerrado**.

- La aceleración del centro de masas del sistema no da información sobre la aceleración de cualquier otra parte del sistema.

1.2.4.1 Ejemplos de aplicación del movimiento de un sistema de partículas

1) Calcula el centro de masas de las tres partículas, una de 2 kg en el punto (0 m; 0 m), otra de 3 kg en el (1 m; 2 m), y la tercera de 4 kg en el (2 m;1 m). [(1,2 m;1,1 m)]

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l}R_{x(CM)}=\dfrac{m_1 r_{1x}+m_2 r_{2x}}{m_1+m_2} \\ R_{y(CM)}=\dfrac{m_1 r_{1y}+m_2 r_{2y}}{m_1+m_2}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}R_{x(CM)}=\dfrac{2\,kg\times 0\,m+3\,kg\times 1\,m+4\,kg\times 2\,m}{9\,kg}=1,2\,m \\ R_{y(CM)}=\dfrac{2\,kg\times 0\,m+3\,kg\times 2\,m+4\,kg\times 1\,m}{9\,kg}=1,1\,m\end{array}\right.$$

2) Calcula el centro de masas de la molécula de agua. Considera el origen en el átomo de oxígeno (16 u), la distancia a los átomos de hidrógeno (1 u) de 9,6 nm y el ángulo de 104,5º.

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l}R_{x(CM)}=\dfrac{16\,u\times 0+1\,u\times 9,6\,nm\times\cos 52,2^{o}+1\,u\times 9,6\,nm\times\cos(360^{o}-52,2^{o})}{18\,u}=0,66\,nm \\ R_{y(CM)}=\dfrac{16\,u\times 0+1\,u\times 9,6\,nm\times\text{sen}\,52,2^{o}+1\,u\times 9,6\,nm\times\text{sen}(360^{o}-52,2^{o})}{18\,u}=0\,nm\end{array}\right.$$

3) Un sistema está compuesto de tres partículas con masas 3 kg, 2 kg y 5 kg. La primera partícula tiene una velocidad de 6 m/s dirigida hacia el eje +X. La segunda se está moviendo con una velocidad de 8 m/s en una dirección que hace un ángulo de -30º con el eje X. Determina la velocidad de la tercera partícula si el C.M. aparece en reposo relativo al observador. [v_x = -6,37m/s; v_y = 1,6 m/s].

Solución:

$$M\vec{V}_{CM} = 0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3$$
$$0 = 3\,\text{kg} \times 6\,\tfrac{m}{s}\,\vec{i} + 2\,\text{kg} \times \left(8\,\tfrac{m}{s} \times \cos 330^o\,\vec{i} + 8\,\tfrac{m}{s} \times \sin 330^o\,\vec{j}\right) + 5\,\text{kg} \times \vec{v}_3$$
$$\vec{v}_3 = -6{,}4\,\tfrac{m}{s}\,\vec{i} + 1{,}6\,\tfrac{m}{s}\,\vec{j}$$

4) Un sistema está formado por dos partículas, de masas 2 kg y 3 kg, inicialmente en reposo en los puntos de coordenadas (0m;4m) y (3m;0m). En el instante t = 0 s se les aplican las fuerzas F_{1x} = 4N y F_{2y} = 6N, respectivamente. Calcular: a) posición y velocidad del CM al cabo de 2 s; b) posición de la segunda partícula al cabo de 4 s. [a) $R_{x(CM)}$ = 3,4m; $R_{y(CM)}$ = 4m; $V_{x(CM)}$ = 1,6m/s; $V_{y(CM)}$ = 2,4m/s; b) r_{2x} = 3m; r_{2y} = 16m].

Solución:

$$\vec{R}_{0(CM)} = \frac{m_1\vec{r}_{01} + m_2\vec{r}_{02}}{m_1 + m_2} = \frac{2\,\text{kg} \times 4\,\text{m}\,\vec{j} + 3\,\text{kg} \times 3\,\text{m}\,\vec{i}}{5\,\text{kg}} = \frac{9}{5}\text{m}\,\vec{i} + \frac{8}{5}\text{m}\,\vec{j}$$

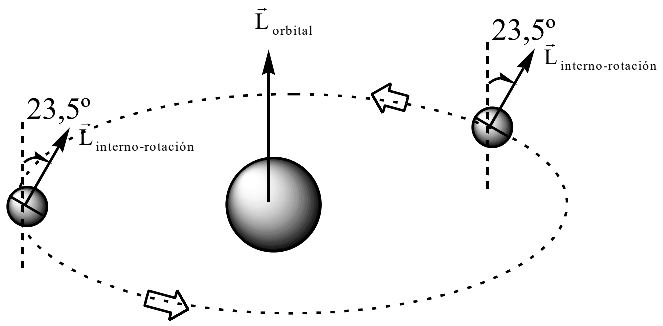
$$\vec{R}_{(CM)} = \vec{R}_{0(CM)} + \vec{V}_{0(CM)}t + \tfrac{1}{2}\vec{a}_{CM}t^2 = \vec{R}_{0(CM)} + \tfrac{1}{2}\frac{\vec{F}_{neta}}{M}t^2$$

$$\vec{R}_{(CM)} = \frac{9}{5}\text{m}\,\vec{i} + \frac{8}{5}\text{m}\,\vec{j} + \frac{1}{2} \times \frac{4\,\text{N}\,\vec{i} + 6\,\text{N}\,\vec{j}}{5\,\text{kg}} \times (2\,\text{s})^2 \quad \left\{ \vec{r}_2 = \vec{r}_{02} + \frac{1}{2}\frac{\vec{F}_2}{m_2}t^2 = 3\,\text{m}\,\vec{i} + \frac{1}{2} \times \frac{6\,\text{N}\,\vec{j}}{3\,\text{kg}} \times (4\,\text{s})^2 \right.$$

1.2.5 Momento angular de un sistema de partículas: Para un sistema de dos partículas, de masas m_1 y m_2, el momento angular del sistema respecto del punto O, del sistema inercial OXY, será la suma de los momentos angulares de cada partícula respecto del mismo punto.

Lo que nos lleva, después del desarrollo matemático, al siguiente enunciado: "El momento angular de un sistema de partículas es la suma del momento angular orbital, $L_{orbital}$, definido respecto del sistema inercial OXYZ (sistema-L), y del momento angular interno, $L_{interno}$, definido respecto del sistema centro de masas (sistema-C) que se toma como origen"**.**

$$\begin{cases} \vec{L}_O = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = (\vec{r}_1 \times \vec{p}_1) + (\vec{r}_2 \times \vec{p}_2) \\ \vec{L}_O = \left[\vec{R}_{CM} \times M\vec{V}_{CM}\right] + \left[(\vec{r}_1' \times \vec{p}_1') + (\vec{r}_2' \times \vec{p}_2')\right] = \vec{L}_{orbital} + \vec{L}_{interno} \end{cases}$$



$$\vec{L}_O = \vec{L}_{orbital} + \vec{L}_{interno}$$

Demostración

$$\vec{L}_O = (\vec{r}_1 \times \vec{p}_1) + (\vec{r}_2 \times \vec{p}_2)$$
$$\vec{L}_O = \left[\left(\vec{R}_{CM} + \vec{r}_1' \right) \times m_1 \left(\vec{V}_{CM} + \vec{v}_1' \right) \right] + \left[\left(\vec{R}_{CM} + \vec{r}_2' \right) \times m_2 \left(\vec{V}_{CM} + \vec{v}_2' \right) \right]$$
$$\vec{L}_O = \vec{R}_{CM} \times \left[(m_1 + m_2) \vec{V}_{CM} + (m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2') \right] + (m_1 \vec{r}_1' + m_2 \vec{r}_2') \times \vec{V}_{CM} + (\vec{r}_1' \times \vec{p}_1') + (\vec{r}_2' \times \vec{p}_2')$$
$$\vec{L}_O = \vec{R}_{CM} \times (m_1 + m_2) \vec{V}_{CM} + (\vec{r}_1' \times \vec{p}_1') + (\vec{r}_2' \times \vec{p}_2') = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}_{CM} + (\vec{r}_1' \times \vec{p}_1') + (\vec{r}_2' \times \vec{p}_2')$$

$$\left\{ \begin{matrix} \vec{r}_1 = \vec{R}_{CM} + \vec{r}_1' \\ \vec{v}_1 = \vec{V}_{CM} + \vec{v}_1' \end{matrix} \right\} \quad \left\{ \begin{matrix} \vec{r}_2 = \vec{R}_{CM} + \vec{r}_2' \\ \vec{v} = \vec{V}_{CM} + \vec{v}_2' \end{matrix} \right\} \quad \left\{ \begin{matrix} m_1 \vec{r}_1' + m_2 \vec{r}_2' = 0 \\ m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' = 0 \end{matrix} \right\}$$

1.2.6 Relación del momento angular de un sistema de partículas con las fuerzas externas

Consideremos un sistema compuesto por dos masas (denominadas 1 y 2). Sobre la masa 1 se ejercen dos fuerzas, la externa y la interna (debida a la masa 2), y sobre la masa 2 se ejercen también dos fuerzas, la externa y la interna (debida a la masa 1). De tal forma que la variación del momento angular con respecto del tiempo de todo el sistema será:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{L}_1 + \vec{L}_2 \right) = \frac{d\vec{L}_1}{dt} + \frac{d\vec{L}_2}{dt} = \left[\vec{r}_1 \times \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_{12} \right) \right] + \left[\vec{r}_2 \times \left(\vec{F}_2 + \vec{F}_{21} \right) \right]$$
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$

1.2.7 Teorema del momento cinético. Principio de conservación del momento angular

Teorema del momento cinético: "*La suma de los momentos de las fuerzas externas actuando sobre un sistema de partículas es igual a la velocidad de cambio con respecto del tiempo del momento angular del sistema*".

Esto tiene significado sólo si los vectores momento (torque) resultantes de las fuerzas externas y momento angular están referidos al mismo origen. En un sistema inercial se puede aplicar a cualquier punto. En un sistema acelerado (tal como una rueda girando) sólo se aplica al centro de masas del sistema.

Principio de conservación del momento angular: "*Si el momento neto de las fuerzas actuantes sobre un sistema de partículas es cero, el vector momento angular del sistema permanece constante, aunque dentro del sistema haya cambios*".

$$\left\{ \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0 \right\} \Rightarrow \left\{ \frac{d}{dt}\left(\vec{L}_O \right) = 0 \right\} \Rightarrow \vec{L}_O = \text{cte.}$$

El Principio de Conservación del Momento Angular implica que si en un sistema aislado el momento angular de alguna parte del sistema cambia por interacciones internas, el resto del sistema debe experimentar un cambio igual de momento angular pero opuesto.

El principio de conservación del momento angular va más allá de las limitaciones de la mecánica Newtoniana. Es válido para partículas cuyas velocidades se aproximan a la velocidad de la luz y también en el mundo de las partículas subatómicas. No se han encontrado excepciones.

Son ejemplos de conservación del momento angular:

- Patinador girando: un patinador girando sobre sí mismo que no esté sometido a un momento o torque exterior su momento angular permanece constante alrededor del eje de rotación, aunque varíe su velocidad angular alejándose los brazos del cuerpo.

- Estabilización de un satélite: Antes de lanzar un satélite de comunicaciones al espacio desde la bodega de la lanzadera espacial se le hace girar alrededor de su eje central. Esto se debe a que de la misma forma que la dirección del movimiento de una partícula es más difícil de cambiar por un impulso cuando el momento lineal de la partícula es grande que cuando es pequeño. De la misma forma la orientación de un objeto girando es más difícil de cambiar por un torque externo cuando el objeto tiene un momento angular grande que si es pequeño. La orientación de un satélite que no está girando puede ser alterada por pequeños momentos externos como presiones de radiación solares o pequeñas restos de atmósfera.

1.2.8 Energía cinética de un sistema de partículas

Análisis de la energía cinética de una partícula: Teorema trabajo-energía cinética: Si sobre una partícula, de masa m, realizamos una fuerza y la partícula experimenta un desplazamiento se define el trabajo realizado por la fuerza sobre la partícula:

$$W_{neto} = \int_i^f \vec{F}_{neta} \cdot d\vec{r} = \int_i^f \frac{d\vec{p}}{dt} d\vec{r} = \int_i^f \vec{v} d\vec{p} = \int_i^f m\vec{v} d\vec{v} = \tfrac{1}{2} m v_f^2 - \tfrac{1}{2} m v_i^2 = \Delta E_{cinética}$$

La energía cinética de un sistema de N partículas será la suma de las energías cinéticas de cada una de ellas.

Sea un sistema de dos partículas, de masas m_1 y m_2, si consideramos sus velocidades *referidas a un sistema inercial OXYZ*, la energía cinética del sistema será igual a la suma de las energías cinéticas de cada partícula: $E_c = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2$.

La energía cinética de cada partícula depende de la velocidad, y esta depende del sistema de referencia elegido, luego **la energía cinética de un sistema de partículas dependerá del sistema de referencia usado**.

Por tanto, si consideramos las velocidades, de cada partícula, *respecto del centro de masas* del sistema, la energía cinética interna será: $E'_c = \tfrac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2'^2$.

Siendo la **relación entre ellas**:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_c = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 = \tfrac{1}{2} m_1 \left(\vec{V}_{CM} + \vec{v}_1' \right)^2 + \tfrac{1}{2} m_2 \left(\vec{V}_{CM} + \vec{v}_2' \right)^2 \\ E_c = \tfrac{1}{2} (m_1 + m_2) \vec{V}_{CM}^2 + \tfrac{1}{2} m_1 \vec{v}_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_2 \vec{v}_2'^2 + \vec{V}_{CM} (m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2') \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} m_1 \vec{r}_1' + m_2 \vec{r}_2' = 0 \\ m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' = 0 \end{array} \right\}$$

$$E_c = \tfrac{1}{2} M \vec{V}_{CM}^2 + E'_c = E_{c(traslación)} + E'_{c(interna)}$$

"*La Energía Cinética de un sistema de partículas puede expresarse como la suma de la energía cinética orbital, asociada con el movimiento del centro de masas, y de la energía cinética interna, relativa al centro de masas*"**.**

Es importante entender claramente que **la energía cinética interna es una propiedad del cuerpo, independiente del observador** y distinta de la energía cinética de traslación del sistema.

1.2.9 Colisiones. Tipos de colisiones

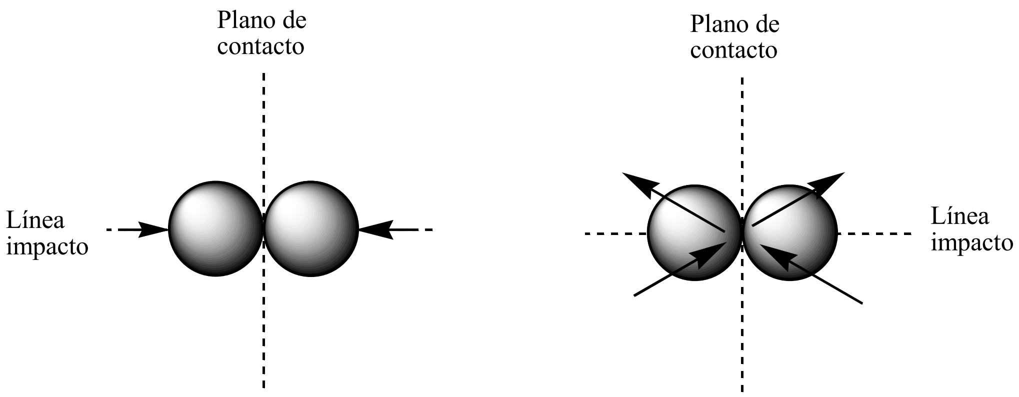
El principio de conservación del momento lineal se aplica a las colisiones. Cuando dos partículas se aproximan la interacción mutua cambia su movimiento, en una colisión las dos partículas no tienen que entrar en contacto físicamente. Así cuando un cometa se aproxima al Sistema Solar su trayectoria se curva debido a la interacción o colisión. Otro ejemplo sería la colisión de un partícula alfa con un núcleo.

Si consideramos las dos partículas que colisionan como un sistema cerrado y aislado, **en la colisión no intervienen fuerzas externas**, por aplicación del principio de conservación del momento lineal decimos que el momento lineal del sistema permanecerá constante. Cuando la suma de los impulsos externos actuando sobre un sistema de partículas es cero:

$$\sum \vec{F}_i = \sum \frac{d\vec{p}_i}{dt} = 0 \quad \left\{ \sum \frac{d\vec{p}_i}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum \vec{p}_i = \text{cte.} \right\} \quad \left\{ \sum \vec{p}_i = \sum \vec{p}'_i \right.$$

Esta ecuación es el principio de conservación del momento lineal. En ella se establece que la suma vectorial del momento lineal del sistema permanece constante con el tiempo.

Si **la energía cinética total** de un sistema de dos partículas que colisionan **se conserva** es una **colisión elástica**. En la vida diaria las colisiones siempre transfieren energía cinética a otra forma de energía, térmica o acústica. Por lo que si la energía cinética del sistema no se conserva es una **colisión inelástica**. En el caso de que después de la colisión las dos partículas salgan pegadas es cuando hay mayor pérdida de energía cinética del sistema, y es una **colisión completamente inelástica**.



Impacto Central **Impacto Oblícuo**

Un **impacto** tiene lugar cuando dos cuerpos colisionan durante un intervalo muy pequeño de tiempo, provocando fuerzas relativamente grandes entre los dos cuerpos. En general hay **dos tipos de impacto**. El **impacto central** tiene lugar cuando la dirección de movimiento de los centros de masas de las dos partículas que colisionan está a lo largo de la línea que pasa a través de los centros de masas de las partículas. Esta línea se llama **línea de impacto**, perpendicular al **plano de contacto**. Cuando el movimiento de una o de las dos partículas forma un ángulo con la línea de impacto se dice que le **impacto es oblicuo**.

Procedimiento para analizar el impacto central:

Consideremos el impacto de dos partículas con las siguientes características:

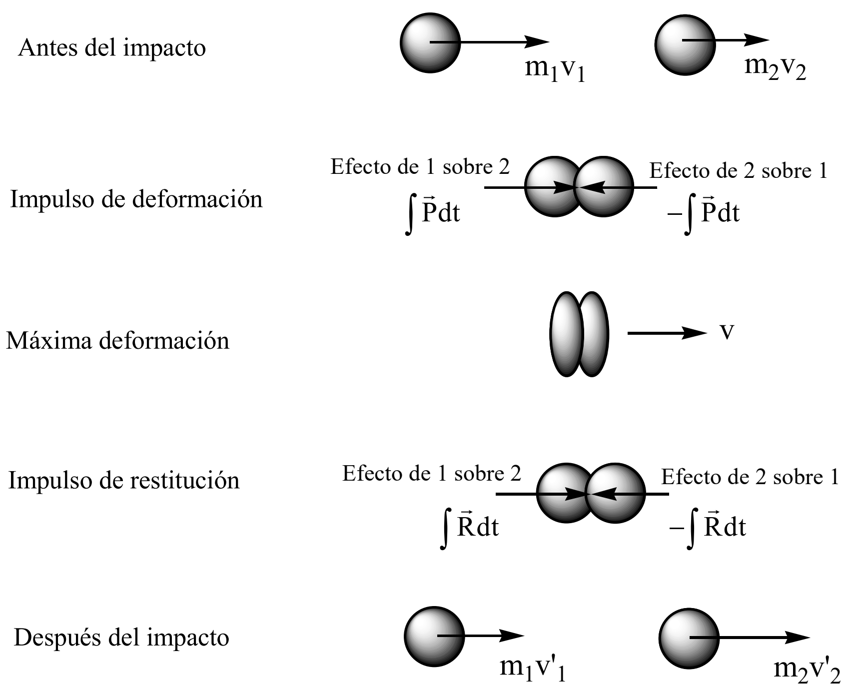
1. Las partículas tienen un momento lineal inicial: $p_i = m_1 v_1 + m_2 v_2$.

2. El material de las partículas es deformable, por lo que estas experimentarán un *período de deformación* tal que entre ellas se ejercen un *impulso de deformación* igual, pero opuesto.

3. En el instante de máxima deformación las dos partículas se moverán a la misma velocidad.

4. Después habrá un *período de restitución* y las partículas volverán a su forma original o permanecerán deformadas siempre. El *impulso de restitución* que separa las partículas una de la otra, será igual y opuesto. El impulso de deformación es siempre mayor que el impulso de restitución.

5. Después de separarse las partículas tendrán un momento lineal final: $p_f = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$.



Conservación del momento lineal: $\vec{p}_i = \vec{p}_f \quad \{m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2$

Impulso sobre cada partícula y variación del momento lineal:

$$\begin{Bmatrix} -\int Pdt = m_1v - m_1v_1 \\ -\int Rdt = m_1v'_1 - m_1v \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \int Pdt = m_2v - m_2v_2 \\ \int Rdt = m_2v'_2 - m_2v \end{Bmatrix}$$

Coeficiente de restitución e, es la relación entre el impulso de restitución y el impulso de deformación:

$$e = \frac{\int Rdt}{\int Pdt} = \frac{m_1v'_1 - m_1v}{m_1v - m_1v_1} = \frac{v'_1 - v}{v - v_1} = \frac{v'_2 - v}{v - v_2} \quad \begin{Bmatrix} v'_1 - v = e(v - v_1) = ev - ev_1 \\ \underline{v'_2 - v = e(v - v_2) = ev - ev_2} \\ v'_2 - v'_1 = -ev_2 + ev_1 = e(-v_2 + v_1) \end{Bmatrix} \quad e = -\frac{v'_2 - v'_1}{v_2 - v_1}$$

El coeficiente de restitución relaciona las velocidades relativas de las partículas a lo largo de la línea de impacto, solamente antes y después de la colisión.

<u>Tipos de colisiones</u>:

Las *colisiones* o impactos son: 1) **Elástico** ($e = 1$) si la colisión es perfectamente elástica, en la que el impulso de deformación es igual y opuesto al impulso de restitución; 2) **Inelástico** ($e < 1$) si la colisión no es perfectamente elástica, en la que el impulso de deformación es mayor y opuesto al impulso de restitución; 3) **Plástico** ($e = 0$) si la colisión tiene un impulso de restitución cero, por lo que las dos partículas terminan acopladas y se mueven con una velocidad común.

Procedimiento para analizar el impacto oblicuo: 1) Se conserva el momento lineal del sistema de partículas a lo largo de la línea de impacto. 2) El coeficiente de restitución, $e = -\frac{(v'_{2x} - v'_{1x})_{final}}{(v_{2x} - v_{1x})_{inicial}}$, relaciona las componentes de las velocidades relativas de las partículas a lo largo de la línea de impacto, eje x, solamente antes y después de la colisión. 3) El momento lineal de la partícula A se conserva a lo largo del eje y, perpendicular a la línea de impacto, ya que no existe impulso sobre la partícula A en esa dirección. 4) El momento de la partícula B se conserva a lo largo del eje y, perpendicular a la línea de impacto, ya que no actúa impulso sobre la partícula B en esa dirección.

Para el análisis del problema de las colisiones no es posible utilizar el principio de trabajo-energía, ya que a partir de él no es posible conocer cómo varían o se mueven durante la colisión, las fuerzas internas de deformación y de restitución. Ahora bien, conociendo las velocidades de las partículas, antes y después de la colisión, la pérdida de energía durante la colisión se puede calcular en base a la diferencia de la energía cinética de las partículas. Cuando ocurre la colisión, la pérdida de energía, $E_{c_2} - E_{c_1} = -\left(U_2 - U_1\right)$, se debe a que parte de la energía cinética de la partícula se transforma en energía térmica así como en crear sonido y en la deformación localizada del material.

1.2.9.1 Impacto Central

Colisión elástica (e = 1) siendo la línea de impacto en el eje X y el plano de contacto el eje OY:

Conservación del momento lineal: $\vec{p}_i = \vec{p}_f \quad \left\{ m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \right.$

Coeficiente de restitución**:** $e = 1 = -\dfrac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1}$

Solución:

$$\left.\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \\ v_2' - v_1' = -\left(v_2 - v_1\right) \\ v_2' = v_1' - v_2 + v_1 \end{cases}\right\} \left.\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2\left(v_1' - v_2 + v_1\right) \\ \left(m_1 - m_2\right) v_1 + 2 m_2 v_2 = \left(m_1 + m_2\right) v_1' \end{cases}\right\} v_1' = \frac{\left(m_1 - m_2\right) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$\left.\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1\left(v_2' + v_2 - v_1\right) + m_2 v_2' \\ 2 m_1 v_1 + \left(m_2 - m_1\right) v_2 = \left(m_1 + m_2\right) v_2' \end{cases}\right\} \quad v_2' = \frac{2 m_1 v_1 + \left(m_2 - m_1\right) v_2}{m_1 + m_2}$$

En la colisión elástica se conserva la energía cinética: $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$

Demostración: $\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} m_1 \left[\dfrac{\left(m_1 - m_2\right) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2}\right]^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[\dfrac{2 m_1 v_1 + \left(m_2 - m_1\right) v_2}{m_1 + m_2}\right]^2 =$

$$= \frac{1}{2} \frac{m_1\left(m_1 - m_2\right)^2 v_1^2 + m_1\left(2 m_2 v_2\right)^2 + 4 m_1 m_2 v_1 v_2\left(m_1 - m_2\right) + m_2\left(2 m_1 v_1\right)^2 + m_2\left(m_2 - m_1\right)^2 v_2^2 + 4 m_1 m_2 v_1 v_2\left(m_2 - m_1\right)}{\left(m_1 + m_2\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m_1 v_1^2\left[\left(m_1 - m_2\right)^2 + m_2 2^2 m_1\right] + m_2 v_2^2\left[m_1 2^2 m_2 + \left(m_2 - m_1\right)^2\right]}{\left(m_1 + m_2\right)^2} = \frac{1}{2} \frac{m_1 v_1^2\left[\left(m_1 + m_2\right)^2\right] + m_2 v_2^2\left[\left(m_1 + m_2\right)^2\right]}{\left(m_1 + m_2\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

Otra demostración: considera que se ha de cumplir que $v_2' - v_1' = -\left(v_2 - v_1\right)$.

$$\tfrac{1}{2}m_1v_1^2+\tfrac{1}{2}m_2v_2^2=\tfrac{1}{2}m_1v_1'^2+\tfrac{1}{2}m_2v_2'^2 \quad \left\{-m_1\left(v_1'^2-v_1^2\right)=m_2\left(v_2'^2-v_2^2\right)\right.$$

$$m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2v_2' \quad \left\{-m_1\left(v_1'-v_1\right)=m_2\left(v_2'-v_2\right)\right.$$

$$\left.\begin{cases}-m_1\left(v_1'+v_1\right)\left(v_1'-v_1\right)=m_2\left(v_2'+v_2\right)\left(v_2'-v_2\right)\\ -m_1\left(v_1'-v_1\right)=m_2\left(v_2'-v_2\right)\end{cases}\right\}\left.\begin{cases}\left(v_1'+v_1\right)=\left(v_2'+v_2\right)\\ v_2'-v_1'=-\left(v_2-v_1\right)\end{cases}\right\}\left\{e=1=-\frac{v_2'-v_1'}{v_2-v_1}\right.$$

<u>Colisión inelástica</u> ($0 < e < 1$) siendo la línea de impacto en el eje X y el plano de contacto el eje OY:

Conservación del momento lineal: $\vec{p}_i=\vec{p}_f \quad \left\{m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2v_2'\right.$

Coeficiente de restitución**:** $e=-\dfrac{v_2'-v_1'}{v_2-v_1}$

Solución:

$$\left.\begin{cases}m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2v_2'\\ v_2'-v_1'=-e\left(v_2-v_1\right)\\ v_2'=v_1'-ev_2+ev_1\end{cases}\right\}\left\{\begin{matrix}m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2\left(v_1'-ev_2+ev_1\right)\\ \left(m_1-em_2\right)v_1+m_2\left(1+e\right)v_2=\left(m_1+m_2\right)v_1'\end{matrix}\right\}$$

$$v_1'=\frac{\left(m_1-em_2\right)v_1+m_2\left(1+e\right)v_2}{m_1+m_2}$$

$$\left.\begin{cases}m_1v_1+m_2v_2=m_1\left(v_2'+ev_2-ev_1\right)+m_2v_2'\\ m_1\left(1+e\right)v_1+\left(m_2-em_1\right)v_2=\left(m_1+m_2\right)v_2'\end{cases}\right\} \quad v_2'=\frac{m_1\left(1+e\right)v_1+\left(m_2-em_1\right)v_2}{m_1+m_2}$$

<u>Colisión plástica o totalmente inelástica</u> ($e = 0$) siendo la línea de impacto en el eje X y el plano de contacto el eje OY. En este tipo de colisión no se conserva la energía cinética

$$\left.\begin{cases}v_1'=\dfrac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}\\ v_2'=\dfrac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}\end{cases}\right\}\left\{\begin{matrix}m_1v_1+m_2v_2=\left(m_1+m_2\right)v_1'\\ m_1v_1+m_2v_2=\left(m_1+m_2\right)v_2'\end{matrix}\right\} \quad \left\{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=\left(m_1+m_2\right)\vec{v}_{CM}'\right.$$

<u>1.2.9.2 Impacto Oblicuo</u>

Si el eje Y se establece dentro del plano de contacto y el eje X a lo largo de la línea de impacto, las fuerzas impulsivas de deformación y restitución actúan sólo en la dirección del eje X. Descomponiendo los vectores velocidad o momento lineal en componentes a lo largo de los ejes X e Y es posible escribir cuatro ecuaciones escalares independientes para determinar las componentes de la velocidad antes y después del impacto.

<u>Colisión elástica</u> ($e = 1$) siendo la línea de impacto en el eje X y el plano de contacto el OY:

Conservación del momento lineal del sistema a lo largo de la línea de impacto, eje X:

$$m_1v_{1x}+m_2v_{2x}=m_1v_{1x}'+m_2v_{2x}'$$

Conservación del momento lineal de la partícula 1, a lo largo del eje Y, que es perpendicular a la línea de impacto, mientras no actúe un impulso sobre la partícula 1 en esa dirección: $m_1v_{1y}=m_1v_{1y}'$

Conservación del momento lineal de la partícula 2, a lo largo del eje Y, que es perpendicular a la línea de impacto, mientras no actúe un impulso sobre la partícula 2 en esa dirección: $m_2 v_{2y} = m_2 v'_{2y}$

El coeficiente de restitución, $e = 1 = -\dfrac{\left(v'_{2x} - v'_{1x}\right)_{\text{final}}}{\left(v_{2x} - v_{1x}\right)_{\text{inicial}}}$,

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x} \\ v'_{2x} - v'_{1x} = -\left(v_{2x} - v_{1x}\right) \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v'_{1x} + m_2\left(v'_{1x} - v_{2x} + v_{1x}\right) \\ \left(m_1 - m_2\right) v_{1x} + 2 m_2 v_{2x} = \left(m_1 + m_2\right) v'_{1x} \end{array}\right.$$

$$v'_{1x} = \frac{\left(m_1 - m_2\right) v_{1x} + 2 m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2} \quad \left\{ v'_{1y} = v_{1y} \right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1\left(v'_{2x} + v_{2x} - v_{1x}\right) + m_2 v'_{2x} \\ 2 m_1 v_{1x} + \left(m_2 - m_1\right) v_{2x} = \left(m_1 + m_2\right) v'_{2x} \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} v'_{2x} = \dfrac{2 m_1 v_{1x} + \left(m_2 - m_1\right) v_{2x}}{m_1 + m_2} \\ v'_{2y} = v_{2y} \end{array}\right.$$

En la colisión elástica se conserva la energía cinética: $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$

Demostración: considera que para ser cierta se ha de cumplir que $v'_{2x} - v'_{1x} = -\left(v_{2x} - v_{1x}\right)$.

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x} \quad \left\{ -m_1\left(v'_{1x} - v_{1x}\right) = m_2\left(v'_{2x} - v_{2x}\right) \right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \\ \frac{1}{2} m_1\left(v_{1x}^2 + v_{1y}^2\right) + \frac{1}{2} m_2\left(v_{2x}^2 + v_{2y}^2\right) = \frac{1}{2} m_1\left(v_{1x}'^2 + v_{1y}'^2\right) + \frac{1}{2} m_2\left(v_{2x}'^2 + v_{2y}'^2\right) \\ -m_1\left(v_{1x}'^2 + v_{1y}'^2 - v_{1x}^2 - v_{1y}^2\right) = m_2\left(v_{2x}'^2 + v_{2y}'^2 - v_{2x}^2 - v_{2y}^2\right) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} v_{1y} = v'_{1y} \\ v_{2y} = v'_{2y} \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} -m_1\left(v_{1x}'^2 - v_{1x}^2\right) = m_2\left(v_{2x}'^2 - v_{2x}^2\right) \\ -m_1\left(v'_{1x} + v_{1x}\right)\left(v'_{1x} - v_{1x}\right) = m_2\left(v'_{2x} + v_{2x}\right)\left(v'_{2x} - v_{2x}\right) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} -m_1\left(v'_{1x} - v_{1x}\right) = m_2\left(v'_{2x} - v_{2x}\right) \\ -m_1\left(v'_{1x} + v_{1x}\right)\left(v'_{1x} - v_{1x}\right) = m_2\left(v'_{2x} + v_{2x}\right)\left(v'_{2x} - v_{2x}\right) \end{array}\right.$$

$$\left\{ \frac{-m_1\left(v'_{1x} + v_{1x}\right)\left(v'_{1x} - v_{1x}\right)}{-m_1\left(v'_{1x} - v_{1x}\right)} = \frac{m_2\left(v'_{2x} + v_{2x}\right)\left(v'_{2x} - v_{2x}\right)}{m_2\left(v'_{2x} - v_{2x}\right)} \right\} \quad \left\{\begin{array}{l} v'_{1x} + v_{1x} = v'_{2x} + v_{2x} \\ v'_{2x} - v'_{1x} = -\left(v_{2x} - v_{1x}\right) \end{array}\right.$$

Colisión inelástica ($0 < e < 1$) siendo la línea de impacto en el eje X y el plano de contacto el OY:

Conservación del momento lineal del sistema a lo largo de la línea de impacto, eje X:

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x}$$

Conservación del momento lineal de la partícula 1, a lo largo del eje Y, que es perpendicular a la línea de impacto, mientras no actúe un impulso sobre la partícula 1 en esa dirección: $m_1 v_{1y} = m_2 v'_{1y}$

Conservación del momento lineal de la partícula 2, a lo largo del eje Y, que es perpendicular a la línea de impacto, mientras no actúe un impulso sobre la partícula 2 en esa dirección: $m_2 v_{2y} = m_2 v'_{2y}$

El coeficiente de restitución, $e = -\dfrac{\left(v'_{2x} - v'_{1x}\right)_{\text{final}}}{\left(v_{2x} - v_{1x}\right)_{\text{inicial}}}$,

Solución:

$$\left.\begin{cases} m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x} \\ v'_{2x} - v'_{1x} = -e\left(v_{2x} - v_{1x}\right) \end{cases}\right\} \quad \begin{cases} m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v'_{1x} + m_2\left(v'_{1x} - e v_{2x} + e v_{1x}\right) \\ \left(m_1 - e m_2\right) v_{1x} + m_2\left(1+e\right) v_{2x} = \left(m_1 + m_2\right) v'_{1x} \end{cases}$$

$$v'_{1x} = \frac{\left(m_1 - e m_2\right) v_{1x} + m_2\left(1+e\right) v_{2x}}{m_1 + m_2} \quad \left\{ v'_{1y} = v_{1y} \right.$$

$$\left.\begin{cases} m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1\left(v'_{2x} + e v_{2x} - e v_{1x}\right) + m_2 v'_{2x} \\ m_1\left(1+e\right) v_{1x} + \left(m_2 - e m_1\right) v_{2x} = \left(m_1 + m_2\right) v'_{2x} \end{cases}\right\} \quad \begin{cases} v'_{2x} = \dfrac{m_1\left(1+e\right) v_{1x} + \left(m_2 - e m_1\right) v_{2x}}{m_1 + m_2} \\ v'_{2y} = v_{2y} \end{cases}$$

Movimiento oscilatorio: el movimiento vibratorio armónico simple

Una partícula posee movimiento oscilatorio o vibratorio cuando se mueve periódicamente alrededor de una posición de equilibrio. Son ejemplos de movimiento oscilatorio: a) un péndulo simple, que consiste en una masa balanceándose en el extremo de una varilla rígida; b) una masa sujeta a una pared a través de un muelle poco rígido; c) un circuito eléctrico, una carga q moviéndose a través de una inductancia L conectada a un condensador C; d) los átomos en un sólido y en una molécula están vibrando respecto de los otros átomos; e) los electrones en una antena, radiando o recibiendo están en oscilación rápida.

Para entender los fenómenos ondulatorios, relacionados con el sonido y la luz, es necesario conocer el movimiento vibratorio. Magnitudes importantes del movimiento oscilatorio:

- **Frecuencia**: *el número de oscilaciones que son completadas cada segundo*. Completar una oscilación es volver a la misma posición o estado que tenía. El símbolo ν se usa para la frecuencia y su unidad es el hertz (Hz). Donde 1 hertz = 1 Hz = 1 oscilación por segundo.
- **Período**: *el tiempo necesario para una oscilación completa*. El símbolo es T, y está relacionado con la frecuencia del mismo: $T = \nu^{-1}$.

Cualquier movimiento que se repite en intervalos determinados se llama **movimiento periódico** o **movimiento armónico**. Existe un movimiento que se repite de una forma particular y se llama **movimiento armónico simple**. Si el movimiento periódico es una función sinusoidal del tiempo y el **desplazamiento** de la partícula, desde el origen, viene dado como una función del tiempo del tipo: $\mathbf{x = A\cdot\cos(\omega\cdot t + \phi_0)}$, en la que el desplazamiento depende sólo de la variable t, los demás parámetros $(\mathbf{A, \omega, \phi_0})$ son constantes. El **movimiento armónico simple** significa que el movimiento periódico es una función sinusoidal del tiempo.

De todos los movimientos oscilatorios, el más importante es el llamado **movimiento armónico simple**. Además de ser el movimiento más sencillo de analizar y describir, constituye la mejor descripción de muchas oscilaciones que se encuentran en la naturaleza. Aunque no todos los movimientos oscilatorios son armónicos.

La **amplitud** del movimiento es la cantidad **A** que es una constante positiva, cuyo valor depende de cómo ha empezado el movimiento. La función coseno varía entre los límites ±1, así que el desplazamiento x varía entre los límites ±A.

La **fase del movimiento** es una cantidad variable con el tiempo, $\mathbf{\phi = (\omega\cdot t + \phi_0)}$, y $\mathbf{\phi_0}$ es la constante de fase. El valor de $\mathbf{\phi_0}$ depende del desplazamiento y la velocidad de la partícula en el tiempo inicial t = 0.

La magnitud ω se llama la frecuencia angular del movimiento, su unidad es 1 rad/s. Para interpretar la constante $\omega = 2\pi\nu$ consideramos que el valor del desplazamiento x(t) debe volver a su valor inicial después de un tiempo llamado período T, siendo x(t) = x(t + T). Demostración:

$$\left.\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega t + \phi_0) \\ x(t+T) = A\cos[\omega(t+T) + \phi_0] \end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} x(t) = x(t+T) \\ \cos(\omega t + \phi_0) = \cos[\omega(t+T) + \phi_0] \\ (\omega t + \phi_0) = [\omega(t+T) + \phi_0] \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \omega T = 2\pi \\ \omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \end{cases}$$

Deducción de la ecuación del movimiento:

La ecuación del movimiento de un sistema perturbado se obtiene del balance dinámico entre las fuerzas actuantes sobre el sistema. La segunda ley de Newton para aprender qué fuerza puede actuar sobre la partícula, para que tenga esa aceleración y la fuerza restauradora, que es igual al producto de una constante de proporcionalidad, k, que es llamada la rigidez por el desplazamiento desde la posición de equilibrio. La constante k es la fuerza restauradora por unidad de longitud.

$$\boxed{F_{\text{sobre-partícula}} = F_{\text{restauradora(ley-Hooke)}}} \quad \begin{cases} F_{\text{sobre-partícula}} = ma = m\dfrac{dv}{dt} = m\dfrac{d^2x}{dt^2} \\ F_{\text{restauradora(ley-Hooke)}} = -kx \end{cases}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0} \quad \left\{\omega^2 = \frac{k}{m} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}\right\}$$

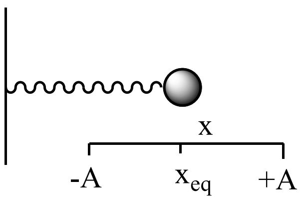
Soluciones de la ecuación anterior para x: 1) **x = A·cos (ω·t + ϕ_0)**; 2) **x = A·sen (ω·t + ϕ_0)**.

Demostración:

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0) \quad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0) \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi_0) = -\omega^2 x \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$x = A\operatorname{sen}(\omega t + \phi_0) \quad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \omega A \cos(\omega t + \phi_0) \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -\omega^2 A\operatorname{sen}(\omega t + \phi_0) = -\omega^2 x \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Cinemática del movimiento armónico simple (MAS)



x(t) = A·cos (ω·t + ϕ_0)
v = –A·ω·sen (ω·t + ϕ_0)
a = –A·ω^2·cos (ω·t + ϕ_0) = –ω^2·x

La **posición** de la partícula: $\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \phi_0)}$

La **velocidad** de la partícula: $v = \dfrac{dx}{dt} = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0) = -A\omega\cos\left[(\omega t + \phi_0) - \tfrac{1}{2}\pi\right]$

$$\begin{cases} v = -A\omega\operatorname{sen}(\omega t + \phi_0) = -A\omega\cos\left[(\omega t + \phi_0) - \tfrac{1}{2}\pi\right] \\ \cos\left[(\omega t + \phi_0) - \tfrac{1}{2}\pi\right] = \cos(\omega t + \phi_0)\cos\tfrac{1}{2}\pi + \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\pi = \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2 = A^2\omega^2\left(1 - \cos^2(\omega t + \phi_0)\right) = A^2\omega^2\left(1 - \dfrac{x^2}{A^2}\right) = A^2\omega^2 - \omega^2 x^2 = \omega^2\left(A^2 - x^2\right) \\ v = -\omega A\sqrt{1 - \cos^2(\omega t + \phi_0)} = -\omega\sqrt{A^2 - x^2} \end{cases}$$

La **aceleración** de la partícula: $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi_0) = -\omega^2 x$

$$\boxed{\begin{aligned}&x = A\cos(\omega t+\phi_0)\\&v=\frac{dx}{dt}=-A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t+\phi_0)=-\omega\sqrt{A^2-x^2}=-A\omega\cos\left[(\omega t+\phi_0)-\tfrac{1}{2}\pi\right]\\&a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=--A\omega^2\cos(\omega t+\phi_0)=-\omega^2x\end{aligned}}$$

Representación gráfica de un M.A.S: x = 0,05·cos (π·t); v = -0,05·π·sen (π·t)

$$\left\{\begin{aligned}x&=A\cdot\cos(\omega t+\phi_0)=0,05\cdot\cos(\pi t)\\v&=-A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t+\phi_0)=-0,05\pi\cdot\mathrm{sen}(\pi t)\end{aligned}\right\}\quad\left\{\omega=\pi\,\tfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}=\frac{2\pi}{T}\right\}\quad T=\frac{2\pi}{\pi}=2\,\mathrm{s}$$

$$x_{0(t=0)}=0,05\cdot\cos 0=0,05\,\mathrm{m}\ \Rightarrow\ v_{0(t=0)}=-0,05\pi\cdot\mathrm{sen}\,0=0\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$
$$x_{\left(t=\frac{1}{4}T\right)}=0,05\cdot\cos\left(\pi\tfrac{1}{4}2\right)=0,05\cdot\cos\left(\tfrac{1}{2}\pi\right)=0\,\mathrm{m}\ \Rightarrow\ v_{\left(t=\frac{1}{4}T\right)}=-0,05\pi\cdot\mathrm{sen}\left(\tfrac{1}{2}\pi\right)=-0,05\pi\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$
$$x_{\left(t=\frac{1}{2}T\right)}=0,05\cdot\cos\left(\pi\tfrac{1}{2}2\right)=0,05\cdot\cos(\pi)=-0,05\,\mathrm{m}\ \Rightarrow\ v_{\left(t=\frac{1}{2}T\right)}=-0,05\pi\cdot\mathrm{sen}(\pi)=0\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$
$$x_{\left(t=\frac{3}{4}T\right)}=0,05\cdot\cos\left(\pi\tfrac{3}{4}2\right)=0,05\cdot\cos\left(\tfrac{3}{2}\pi\right)=0\,\mathrm{m}\ \Rightarrow\ v_{\left(t=\frac{3}{4}T\right)}=-0,05\pi\cdot\mathrm{sen}\left(\tfrac{3}{2}\pi\right)=+0,05\pi\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$
$$x_{(t=T)}=0,05\cdot\cos(\pi 2)=0,05\cdot\cos(2\pi)=0,05\,\mathrm{m}\ \Rightarrow\ v_{\left(t=\frac{3}{4}T\right)}=-0,05\pi\cdot\mathrm{sen}(2\pi)=0\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$x=A\cdot\cos(\omega t+\phi_0)=0,05\cdot\cos(\pi t)\quad\left\{\omega=\pi\,\tfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}=\frac{2\pi}{T}\right\}\quad T=\frac{2\pi}{\pi}=2\,\mathrm{s}$$

$$x_{\text{máximo}}=+0,05\ \Rightarrow\ \left\{\begin{aligned}&\cos(\pi t)=+1\\&\pi t=n2\pi\quad(n=0,1,2,3\ldots)\end{aligned}\right\}\quad t=2n\quad\left\{\begin{aligned}t_{n=0}&=0\,\mathrm{s}\\t_{n=1}&=2\,\mathrm{s}\end{aligned}\right.$$

$$x_{\text{mínimo}}=-0,05\ \Rightarrow\ \left\{\begin{aligned}&\cos(\pi t)=-1\\&\pi t=(2n+1)\pi\end{aligned}\right\}\quad t=2n+1\quad\left\{\begin{aligned}t_{n=0}&=1\,\mathrm{s}\\t_{n=1}&=3\,\mathrm{s}\end{aligned}\right.$$

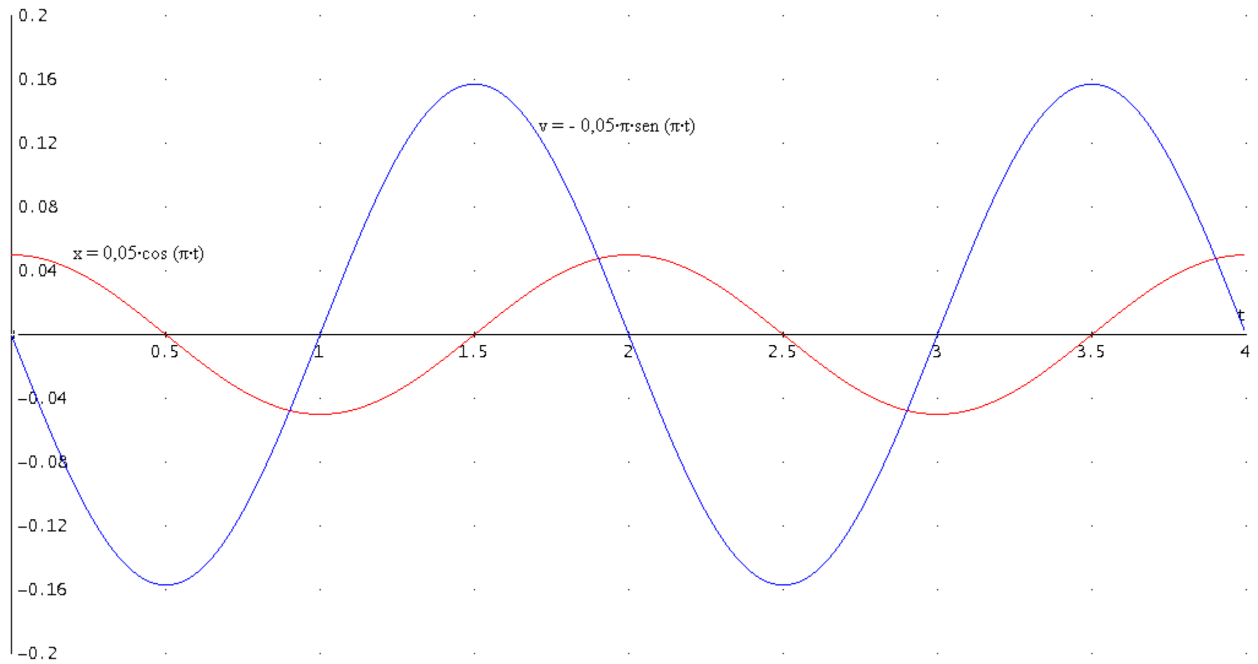
$$x=0=x_0\ \Rightarrow\ \left\{\begin{aligned}&\cos(\pi t)=0\\&\pi t=(2n+1)\frac{\pi}{2}\end{aligned}\right\}\quad t=\frac{2n+1}{2}\quad\left\{\begin{aligned}t_{n=0}&=0,5\,\mathrm{s}\\t_{n=1}&=1,5\,\mathrm{s}\\t_{n=2}&=2,5\,\mathrm{s}\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}x&=A\cdot\cos(\omega t+\phi_0)\\v&=-A\cdot\omega\cdot\mathrm{sen}(\omega t+\phi_0)\end{aligned}\right\}\left\{\begin{aligned}x&=0,05\cdot\cos(\pi t)\\v&=-0,05\pi\cdot\mathrm{sen}(\pi t)\end{aligned}\right\}\quad\omega=\pi=\frac{2\pi}{T}\ \Rightarrow\ T=2\,\mathrm{s}$$

$$v=0\ \Rightarrow\ \left\{\begin{aligned}&\mathrm{sen}(\pi t)=0\\&\pi t=n\pi\end{aligned}\right\}\quad t=n\quad\left\{\begin{aligned}t_{n=0}&=0\,\mathrm{s}\\t_{n=1}&=1\,\mathrm{s}\end{aligned}\right.$$

$$v_{\text{máx}}=+0,05\pi\ \Rightarrow\ \left\{\begin{aligned}&\mathrm{sen}(\pi t)=-1\\&\pi t=\frac{3}{2}\pi+2n\pi\end{aligned}\right\}\quad t=\frac{3}{2}+2n\quad\left\{\begin{aligned}t_{n=0}&=1,5\,\mathrm{s}\\t_{n=1}&=3,5\,\mathrm{s}\end{aligned}\right.$$

$$v_{\text{mín}}=-0,05\pi\ \Rightarrow\ \left\{\begin{aligned}&\mathrm{sen}(\pi t)=+1\\&\pi t=\frac{1}{2}\pi+2n\pi\end{aligned}\right\}\quad t=\frac{1}{2}+2n\quad\left\{\begin{aligned}t_{n=0}&=0,5\,\mathrm{s}\\t_{n=1}&=2,5\,\mathrm{s}\end{aligned}\right.$$



Al comparar las curvas posición-tiempo y velocidad-tiempo, la de la velocidad está retrasada en $\frac{1}{2}\pi$ rad respecto a la de la posición. Este retraso corresponde a la cuarta parte del período, $\frac{1}{4}T$, respecto de la curva del desplazamiento. La diferencia de fase entre posición y desplazamiento es ½π:

$$\Delta\phi = \phi_{x(\text{posición})} - \phi_{v(\text{velocidad})} = (\omega t + \phi_0) - \left[(\omega t + \phi_0) - \tfrac{1}{2}\pi\right] = \tfrac{1}{2}\pi$$

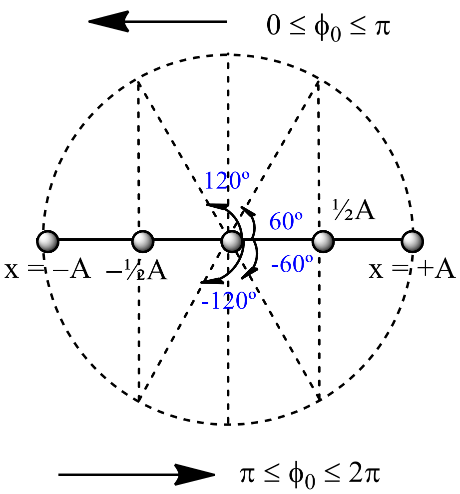
$$\Delta\phi = \omega\Delta t \quad \Rightarrow \quad \Delta t = t_{x(\text{posición})} - t_{v(\text{velocidad})} = \frac{\Delta\phi}{\omega} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\frac{2\pi}{T}} = \tfrac{1}{4}T$$

La **aceleración** de la partícula: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[-\omega A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi_0)\right] = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi_0) = -\omega^2 x$

<u>La fase del movimiento o fase de la oscilación</u>: $\phi = (\omega \cdot t + \phi_0)$

El valor de ϕ_0 es la **constante de fase**, especifica las condiciones iniciales t = 0, del oscilador.

$$\left\{\begin{array}{l} x = A\cos(\omega t + \phi_0) \\ v = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi_0) \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} x_{0(t=0)} = A\cos\phi_0 \\ v_{0(t=0)} = -A\omega\,\mathrm{sen}\,\phi_0 \end{array}\right.$$



$x = A \cdot \cos(\omega t + \phi_0)$

$v = -A \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega t + \phi_0)$

Dependiendo del punto inicial x_0 así será ϕ_0:

$x_0 = +A$ entonces $\phi_0 = 0$

$x_0 = -A$ entonces $\phi_0 = \pi$

$x_0 = 0$ hacia $+A$ entonces $\phi_0 = -\pi/2 = 3/2 \cdot \pi$

$x_0 = 0$ hacia $-A$ entonces $\phi_0 = +\pi/2$

$x_0 = +A/2$ hacia $+A$ entonces $\phi_0 = -\pi/3$

$x_0 = +A/2$ hacia $-A$ entonces $\phi_0 = +\pi/3$

$x_0 = -A/2$ hacia $+A$ entonces $\phi_0 = -2\pi/3$

$x_0 = -A/2$ hacia $-A$ entonces $\phi_0 = +2\pi/3$

Los valores distintos de la constante de fase ϕ_0 corresponden a diferentes puntos de partida del movimiento:

$$x_0 = +A \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = A\cos(\omega t + \phi_0) \\ +A = A\cos\phi_0 \\ \cos\phi_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = 0 \end{array} \right\} \boxed{x = A\cos(\omega t + 0)}$$

$$x_0 = -A \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = A\cos(\omega t + \phi_0) \\ -A = A\cos\phi_0 \\ \cos\phi_0 = -1 \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = \pi \end{array} \right\} \boxed{x = A\cos(\omega t + \pi)}$$

$$x_0 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = A\cos(\omega t + \phi_0) \\ 0 = A\cos\phi_0 \\ \cos\phi_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = \pm\tfrac{1}{2}\pi \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} v = -A\omega\,\text{sen}(\omega t + \phi_0) \\ v_0 = -A\omega\,\text{sen}\,\phi_0 \\ v_{0(\phi_0 = +\frac{1}{2}\pi)} = -A\omega < 0 \\ v_{0(\phi_0 = -\frac{1}{2}\pi)} = +A\omega > 0 \end{array} \right\} \boxed{\begin{array}{l} x_{(0\to+A)} = A\cos(\omega t - \tfrac{1}{2}\pi) \\ x_{(0\to-A)} = A\cos(\omega t + \tfrac{1}{2}\pi) \end{array}}$$

$$x_0 = +\frac{A}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = A\cos(\omega t + \phi_0) \\ +\dfrac{A}{2} = A\cos\phi_0 \\ \cos\phi_0 = 0{,}5 \\ \phi_0 = \pm 60^\circ = \pm\frac{2\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{3} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} v = -A\omega\,\text{sen}(\omega t + \phi_0) \\ v_0 = -A\omega\,\text{sen}\,\phi_0 \\ v_{0(\phi_0 = +\frac{\pi}{3})} < 0 \\ v_{0(\phi_0 = -\frac{\pi}{3})} > 0 \end{array} \right\} \boxed{\begin{array}{l} x_{(0\to+A)} = A\cos(\omega t - \tfrac{1}{3}\pi) \\ x_{(0\to-A)} = A\cos(\omega t + \tfrac{1}{3}\pi) \end{array}}$$

$$x_0 = -\frac{A}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = A\cos(\omega t + \phi_0) \\ -\dfrac{A}{2} = A\cos\phi_0 \\ \cos\phi_0 = -0{,}5 \\ \phi_0 = \pm 120^\circ = \pm\frac{2\pi}{3} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} v = -A\omega\,\text{sen}(\omega t + \phi_0) \\ v_0 = -A\omega\,\text{sen}\,\phi_0 \\ v_{0(\phi_0 = +\frac{2\pi}{3})} < 0 \\ v_{0(\phi_0 = -\frac{2\pi}{3})} > 0 \end{array} \right\} \boxed{\begin{array}{l} x_{(0\to+A)} = A\cos(\omega t - \tfrac{2}{3}\pi) \\ x_{(0\to-A)} = A\cos(\omega t + \tfrac{2}{3}\pi) \end{array}}$$

Si la partícula parte inicialmente de $x_{0(t=0)} = +A$, la constante de fase es $\phi_0 = 0$. Siendo la ecuación de la posición: $x = A \cdot \cos(\omega \cdot t)$, y la velocidad inicial es $v_0 = 0$.

Si la partícula parte inicialmente de $x_{0(t=0)} = -A$, la constante de fase es $\phi_0 = \pi$. Siendo la ecuación de la posición: $x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \pi)$, y la velocidad inicial es $v_0 = 0$.

Si la partícula parte desde un punto entre +A hasta –A la constante de fase ϕ_0 varía entre 0 y π radianes: $0 \le \phi_0 \le \pi$. Y si la partícula parte desde –A hasta +A la constante de fase varía entre $-\pi$ y 0 radianes: $-\pi \le \phi_0 \le 0$.

Ecuaciones

$$\boxed{x = A\cos\phi = A\cos(\omega t + \phi_0)} \quad \Rightarrow \quad v = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0)$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = +A \quad \Rightarrow \quad \cos(\omega t + \phi_0) = +1 \\ \omega t + \phi_0 = 2n\pi \ (n = 0,1,\ldots) \Rightarrow t = \dfrac{2n\pi - \phi_0}{\omega} \\ \left\{\phi_{0(t=0;n=0)} = 0\right\} \quad v_0 = -A\omega \operatorname{sen}\phi_0 = 0 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} x = -A \quad \Rightarrow \quad \cos(\omega t + \phi_0) = -1 \\ \omega t + \phi_0 = (2n+1)\pi \Rightarrow t = \dfrac{(2n+1)\pi - \phi_0}{\omega} \\ \left\{\phi_{0(t=0;n=0)} = \pi\right\} \quad v_0 = -A\omega \operatorname{sen}\phi_0 = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = +\dfrac{A}{2} \quad \left\{\cos(\omega t + \phi_0) = +0{,}5\right\} \\ \omega t + \phi_0 = \frac{1}{6}\pi \quad \left\{v_0 = -A\omega \operatorname{sen}\phi_0 < 0\right. \\ \omega t + \phi_0 = -\frac{1}{6}\pi = \frac{11}{6}\pi \quad \left\{v_0 = -A\omega \operatorname{sen}\phi_0 > 0\right. \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{A}{2} \quad \left\{\cos(\omega t + \phi_0) = -0{,}5\right\} \\ \omega t + \phi_0 = \frac{2}{3}\pi \quad \left\{v_0 = -A\omega \operatorname{sen}\phi_0 < 0\right. \\ \omega t + \phi_0 = -\frac{2}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi \quad \left\{v_0 = -A\omega \operatorname{sen}\phi_0 > 0\right. \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_0 = 0 \quad \left\{\cos(\omega t + \phi_0) = 0\right\} \\ \omega t + \phi_0 = (2n+1)\dfrac{\pi}{2} \quad \left\{ t = \dfrac{(2n+1)\frac{\pi}{2} - \phi_0}{\omega} \right. \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \phi_{0(t=0;n=0)} = \dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad v_0 = -A\omega \operatorname{sen}\phi_0 = -A\omega \\ \phi_{0(t=0;n=1)} = \dfrac{3\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad v_0 = -A\omega \operatorname{sen}\phi_0 = +A\omega \end{array}\right.$$

<u>Ejemplo de movimiento armónico simple</u> de las características siguientes: el desplazamiento máximo de A = 0,05 m y el período de T = 2 s, siendo la constante de fase $\phi_0 = 0$ ($x_0 = A$)

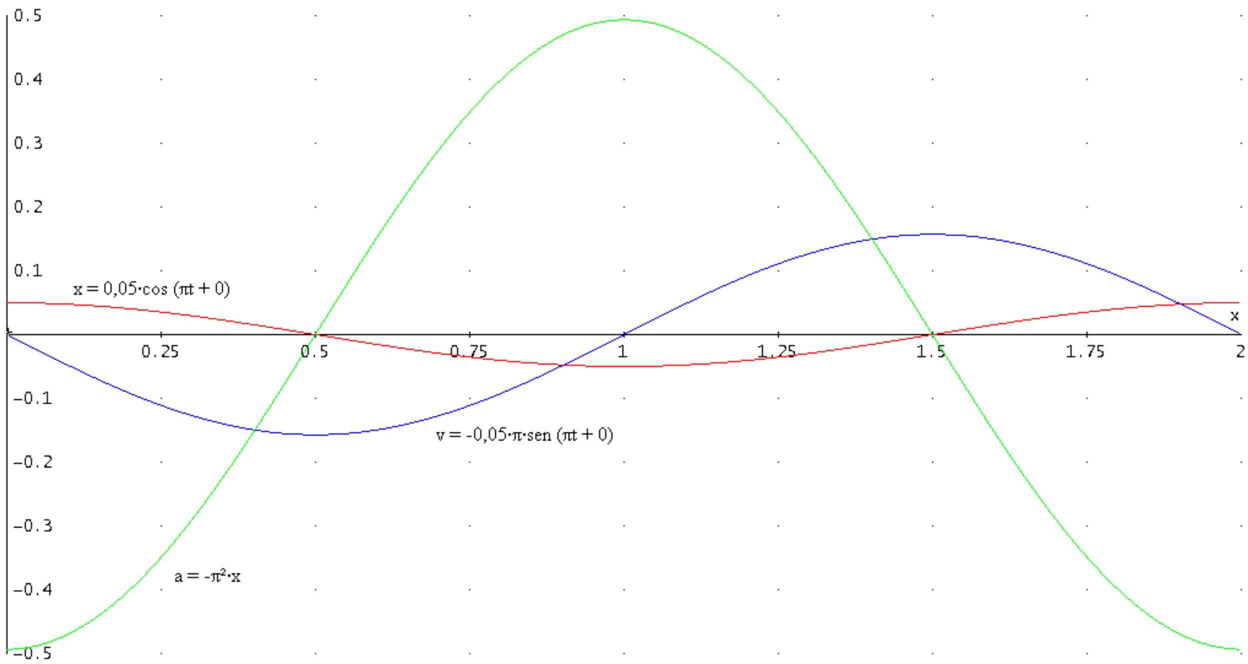
$$x = A\cos(\omega t + \phi_0) = 0{,}05 \cdot \cos(\pi t + 0) \quad \left\{x_0 = 0{,}05\,\text{m} \quad \Rightarrow \phi_0 = 0\right\}$$
$$v = -0{,}05\pi \operatorname{sen}(\pi t + 0)$$
$$a = -\omega^2 x = -\pi^2 0{,}5\cos(\pi t + 0)$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = +A \\ \cos(\omega t) = +1 \end{array}\right\} \omega t = 2n\pi \ (n = 0,1,\ldots) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2n\pi}{\omega} = \frac{2n\pi}{\frac{2\pi}{T}} = nT$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ \cos(\omega t) = 0 \end{array}\right\} \omega t = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{(2n+1)\frac{\pi}{2}}{\omega} = \frac{(2n+1)\frac{\pi}{2}}{\frac{2\pi}{T}} = (2n+1)\frac{T}{4}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = -A \\ \cos(\omega t) = -1 \end{array}\right\} \omega t = (2n+1)\pi \quad \Rightarrow \quad t = \frac{(2n+1)\pi}{\omega} = \frac{(2n+1)\pi}{\frac{2\pi}{T}} = (2n+1)\frac{T}{2}$$

La representación en el eje de ordenadas de los valores de la posición x(m), de la velocidad v(m/s) y de la aceleración a(m/s^2), y en el eje de abscisas el tiempo (s), nos da las siguientes gráficas:



Dinámica del movimiento armónico simple

Conocida la aceleración de una partícula y cómo varía con el tiempo, podemos usar la segunda ley de Newton para aprender qué fuerza puede actuar sobre la partícula, para que tenga esa aceleración. La fuerza restauradora es igual al producto de una constante, k, por el desplazamiento desde la posición de equilibrio. La constante k es la fuerza restauradora por unidad de longitud.

$$\boxed{F_{sobre-partícula} = F_{restauradora(ley-Hooke)}} \quad \left\{ \begin{array}{l} ma = -kx \\ m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx \end{array} \right\} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \equiv \left\{ \frac{\frac{N}{m}}{kg} = \frac{\frac{kg \cdot \frac{m}{s^2}}{m}}{kg} = s^{-2} \right\} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

Las soluciones de la ecuación anterior para x:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = A\cos(\omega t + \phi_0) \\ x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi_0) \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \\ T = \dfrac{1}{\nu} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \end{array} \right.$$

El movimiento armónico simple es el movimiento ejecutado por una partícula de masa m sometida a una fuerza $F = -k \cdot (x - x_0)$, que es proporcional al desplazamiento de la partícula pero opuesta en signo. Cuando el desplazamiento es positivo la fuerza apunta en sentido contrario al desplazamiento, y cuando el desplazamiento es negativo la fuerza apunta en sentido contrario al mismo. Por lo que la fuerza está apuntando siempre hacia el origen x_0, que es el punto de equilibrio. La fuerza es central y atractiva. La constante k se llama constante elástica. Representa la fuerza por unidad de distancia requerida para desplazar la partícula.

El péndulo

Un movimiento de oscilación es el péndulo. Una masa m unida a una cuerda de longitud L que puede oscilar libremente. La posición del péndulo se puede describir por el arco de longitud s, que es cero cuando el péndulo está en la vertical. Los ángulos y el arco son positivos cuando el péndulo está a la derecha del centro y negativos cuando está a la izquierda.

Sobre la masa actúan dos fuerzas: la tensión T y el peso P. Dividimos las fuerzas en componentes tangencial, paralela al movimiento, y componentes radial paralela a la cuerda.

La segunda ley de Newton para la componente tangencial, paralela al movimiento, es

$$F_{t(\text{neta})} = -mg\,\text{sen}\,\theta = ma_t \quad \left\{a_t = \frac{d^2s}{dt^2} = -g\,\text{sen}\,\theta\right\}$$

El ángulo está relacionado por $\theta = s/L$. Esta es la ecuación del movimiento de oscilación del péndulo. La función seno hace la ecuación más complicada que la ecuación del movimiento de un muelle oscilando.

Si hacemos la restricción de que el péndulo oscile para pequeños ángulos de menos de 10º entonces sen $\theta \approx \theta$ (en radianes)

$$F_{t(\text{neta})} = -mg\,\text{sen}\,\theta \approx -mg\theta = -mg\frac{s}{L} = ma_t \quad \left\{a_t = \frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{L}s\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} ma = -kx \\ m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx \end{matrix}\right\} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{L}s \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{L}s = 0 \quad \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{L} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} = \frac{2\pi}{T} \quad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

1.3 Problemas de «Dinámica de una partícula»

1) El vector de posición, de una partícula en movimiento, viene dado por: $\vec{r} = t^2\,\vec{i} + 2t\,\vec{j}\quad(\text{SI})$. Calcule a los 3 s del movimiento: a) la velocidad de la partícula, así como el módulo y el vector unitario de la misma; b) la aceleración y su módulo; c) la aceleración tangencial y su módulo; d) la aceleración normal y su módulo; e) la ecuación de la trayectoria. [a) $\vec{v} = 6\,\frac{m}{s}\,\vec{i} + 2\,\frac{m}{s}\,\vec{j}$; $|\vec{v}| = \sqrt{40}\,\frac{m}{s}$; $\vec{u}_t = \frac{6}{\sqrt{40}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{40}}\vec{j}$; b) $\vec{a} = 2\,\frac{m}{s^2}\,\vec{i}$; $|\vec{a}| = 2\,\frac{m}{s^2}$; c) $\vec{a}_t = 1{,}8\,\frac{m}{s^2}\,\vec{i} + 0{,}6\,\frac{m}{s^2}\,\vec{j}$; $|\vec{a}_t| = 1{,}897\,\frac{m}{s^2}$; d) $|\vec{a}_n| = 0{,}632\,\frac{m}{s^2}$; $\vec{a}_n = 0{,}2\,\frac{m}{s^2}\,\vec{i} - 0{,}6\,\frac{m}{s^2}\,\vec{j}$; e) $y = 2x^{1/2}$].

2) Desde el suelo se dispara un proyectil con una velocidad de 80 ms^{-1} formando un ángulo de 45º con la horizontal. Calcula: a) tiempo de vuelo; b) alcance máximo; c) vector de posición cuando lleva la mitad de tiempo de vuelo; d) ecuación de la trayectoria. [a) 11,5 s; b) 653 m; c) $r_x = 326$ m y $r_y = 163{,}1$ m; d) $y = x - 0{,}0015\cdot x^2$]

3) Un proyectil es lanzado hacia arriba formando un ángulo con la horizontal. Prueba que el tiempo de vuelo del proyectil desde el suelo a su altura máxima es igual al tiempo de vuelo desde su altura máxima al suelo.

4) Una partícula describe una circunferencia de 5 m de radio con velocidad constante de 2 ms^{-1}. En un instante dado frena, con una aceleración constante de 0,5 m/s^2 hasta pararse. Calcula: a) la aceleración de la partícula antes de empezar a frenar; b) la aceleración 2 s después de empezar a frenar; c) la aceleración angular mientras frena; d) tiempo que tarda en parar; e) número de vueltas que da desde que empieza a frenar hasta que se para. [a) 0,8 m/s^2; b) 0,53 m/s^2; c) -0,1 rad/s^2; d) 4 s; e) 0,127 vueltas]

5) Un volante parte del reposo con aceleración constante. Después de dar 100 vueltas la velocidad es de 300 rpm, calcula: a) la aceleración angular; b) la aceleración tangencial de un punto situado a 20 cm del eje. [a) 0,785 rad/s^2; b) 0,157 m/s^2]

6) Una persona de 95 kg está situada sobre una báscula en un ascensor. Determina el peso aparente en los casos: a) el ascensor sube con una aceleración de 1,80 m/s^2; b) el ascensor sube a velocidad constante; c) el ascensor baja con una aceleración de 1,30 m/s^2. [a) 1.102 N; b) 931 N; c) 807,5 N]

7) Un ascensor está subiendo con una persona, de masa 60 kg, situada sobre una báscula. El ascensor partió del reposo y la tensión del cable que está tirando del mismo es de 9.410 N. La masa del ascensor y de la báscula es de 815 kg. Determine: a) la aceleración de subida del ascensor; b) la lectura, sobre la escala de la báscula, durante la subida. [a) 0,95 m/s^2; b) 645 N]

8) Desde lo alto de un ascensor de 3 m de altura se deja caer un objeto, y al mismo instante arranca el ascensor para subir con una aceleración de 2 m/s^2. Calcule: a) el tiempo que tarda el objeto en llegar al suelo del ascensor; b) la longitud recorrida hasta chocar con el suelo. [a) 0,71 s; b) 2,49 m]

9) Un objeto, de masa 2 kg, se suspende del techo de un vagón de ferrocarril que lleva un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado de aceleración 3 m/s^2. Si la cuerda que sujeta al objeto es inextensible y consideramos que su peso es nulo. Calcule: a) el ángulo, que la cuerda forma con la vertical; b) la tensión de la cuerda. [a) 17º; b) 20,5 N]

10) Un bloque en reposo sobre una superficie horizontal pesa 425 N. Una fuerza aplicada al bloque tiene una magnitud de 142 N, estando dirigida hacia arriba formando un ángulo con la horizontal. El bloque empieza a moverse cuando el ángulo es de 60º. Determina el coeficiente de fricción estático entre el bloque y la superficie. [0,235]

11) Un patinador sobre hielo lleva una velocidad inicial de 7,60 m/s. Se desprecia la resistencia del aire. Calcula: a) la desaceleración causada por la fricción cinética, si el coeficiente de fricción cinética entre el hielo y el filo de los patines es de 0,100; b) ¿cuánta distancia recorrerá hasta que se pare?. [a) 0,98 m/s^2; b) 29,5 m]

12) A un bloque de 121 kg le aplicamos una fuerza de 661 N formando un ángulo de 20º por encima de la horizontal. El coeficiente de fricción estático entre el bloque y la superficie es de 0,410. ¿Cuál es la cantidad mínima de masa que se ha de poner encima del bloque para impedir que se mueva?. [56,7 kg]

13) Un bloque de masa 10 kg es empujado hacia arriba en un plano inclinado, de 30º con la horizontal, con una fuerza de 73,1 N y que forma un ángulo de 10º con la tangente al plano inclinado. Si el sistema no tiene rozamiento determina la fuerza que ejerce el plano sobre el bloque y la aceleración a lo largo del plano. [72,2 N y 2,3 m/s^2]

14) Sobre una mesa horizontal tenemos un objeto de masa 10 kg. Si el coeficiente de rozamiento del objeto y la mesa es de 0,25 y, partiendo del reposo, adquiere una velocidad de 12 m/s en 36 m de movimiento rectilíneo, determina el valor de la fuerza horizontal aplicada. [44,5 N]

15) Dos cuerpos de 0,5 kg cada uno cuelgan de los extremos de un hilo que pasa por una polea. ¿Qué masa hay que añadir a uno de ellos para que el otro recorra 1 m en 2s? y ¿qué tensión soportará la cuerda?. [53 g y 5,2 N]

16) Sobre un objeto, de masa de 500 g, se aplican simultáneamente dos fuerzas. Si la velocidad inicial del objeto es $\vec{v}_0 = 3\frac{m}{s}\,\vec{i} - 4\frac{m}{s}\,\vec{j}$ y las fuerzas son $\vec{F}_1 = 2\,N\,\vec{i} + 7\,N\,\vec{j}$ y $\vec{F}_2 = 3\,N\,\vec{i} + 4\,N\,\vec{j}$, determina: a) ¿Cuánto vale el módulo de la aceleración que adquiere la masa?; b) Si la masa se encuentra inicialmente en el punto (0,0) m con una determinada velocidad inicial, ¿qué posición ocupará al cabo de 3 s?. [a) 24,2m/s^2; b) r_x = 54 m; r_y = 87 m]

17) Un bloque de masa 0,2 kg sube por un plano inclinado de 30º con la horizontal, si la velocidad inicial con la que empezó la subida fue de 12 m/s, a) calcula hasta donde subirá si el coeficiente de rozamiento es μ = 0,16 y, b) ¿cuál será la velocidad del bloque cuando llegue a la parte más baja del plano inclinado?. [a) 11,5 m; b) 9,03 m/s]

18) Sobre una mesa horizontal hay un cuerpo de 10 kg, que está unido mediante un hilo y una polea a otro de 5 kg que está colgando verticalmente. El coeficiente de rozamiento cinético del cuerpo con la mesa es μ_k = 0,20. Calcula: a) la aceleración del sistema y dibuja las fuerzas existentes; b) la masa mínima que ha de tener un cuerpo para que al colocarlo sobre el de 10 kg éste no se mueva. [a) 1,96 m/s^2; b) 15 kg]

19) Un objeto, de masa m_1, colocado sobre un plano inclinado, de ángulo θ, está unido mediante un hilo y una polea a otro objeto, de masa m_2, que está colgando verticalmente por la parte vertical del plano inclinado. El coeficiente de rozamiento del objeto con la mesa es μ_k. Haz un esquema y dibuja todas las fuerzas existentes. En función de los parámetros dados, determine: a) la aceleración del sistema; b) la condición que ha de cumplir el sistema para que no se mueva o lo haga sin aceleración. [a) $a = (P_2 - P_1\cdot \text{sen}\theta - \mu_k\cdot P_1\cdot\cos\theta)/(m_1 + m_2)$; b) $P_2 = P_1\cdot\text{sen}\theta + \mu_k\cdot P_1\cdot\cos\theta$]

20) Un ciclista va a realizar un giro llamado el "rizo de la muerte" en el que realiza un giro por una carretera colocada perpendicularmente. Si el radio del rizo es de 2,7 m, ¿cuál es la velocidad menor que puede tener el ciclista para que pueda permanecer en contacto con el rizo?. [5,14 m/s]

21) Un coche viaja a una velocidad constante de 20 m/s por una carretera circular llana de radio 190 m. ¿Cuál es el valor mínimo del coeficiente μ_s estático entre los neumáticos del coche y la carretera para prevenir que el coche se deslice?. [0,21]

22) En una carretera en la que no hay fricción, por ejemplo, sobre hielo, un coche se mueve con una velocidad constante de 20 m/s alrededor de una curva con peralte. Si el radio es de 190 m ¿cuál es el ángulo que deberá tener el peralte si no hay rozamiento?. [12º]

23) En un cilindro de radio 2,1 m apoyamos un objeto, de masa 49 kg, que tiene un coeficiente de rozamiento con la pared del cilindro de 0,40. a) ¿Cuál es la velocidad mínima para que el objeto no se deslice hacia abajo?; b) ¿cuál es la fuerza centrípeta sobre el objeto?. [a) 7,2 m/s; b) 1200 N]

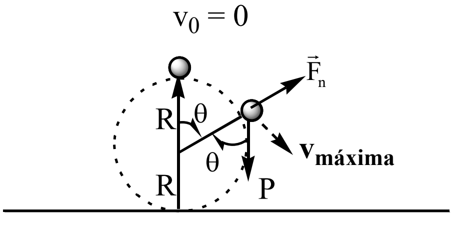
24) a) Calcula la aceleración a_A con la que cae un objeto A, de masa m_A = 5 kg, que está en la rampa de un plano inclinado de 20º con la horizontal, siendo el coeficiente de rozamiento de μ_A = 0,20. b) Calcula la aceleración a_B con la que cae por el plano inclinado si se pone un segundo objeto B, de masa m_B =10 kg, y de coeficiente de rozamiento μ_B = 0,15. c) Calcula la aceleración con la que cae el objeto A si está por encima y pegado el objeto B. d) Determina el tiempo que tarda en caer una distancia de 2 m el objeto A si parte del reposo. [a) a_A = 1,51 m/s^2; b) a_B = 1,97 m/s^2; c) a = 1,81 m/s^2; d) 1,50 s]

25) Un objeto de masa 1 kg, está encima de otro objeto de masa 2 kg, y unido mediante una cuerda fija a una pared. Sobre el objeto de masa 2 kg se aplica una fuerza de 20 N, en sentido contrario a la pared. El coeficiente de rozamiento entre los dos objetos y entre el objeto de 2 kg y el suelo es el mismo μ = 0,40. Calcula: a) la tensión de la cuerda unida al objeto de masa 1 kg; b) la aceleración del objeto de masa 2 kg. [a) 3,92 N; b) 2,16 m/s^2]

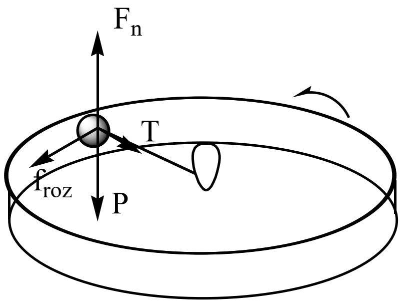
26) Una bola se mueve con una velocidad de 2 m/s en sentido positivo del eje X. Otra bola, de igual masa, se mueve en sentido contrario con una velocidad de 1 m/s. Colisionan, pero no frontalmente, por lo que la segunda se desvía +90º con una velocidad de 1,41 m/s. Calcula la velocidad y la dirección de la primera bola después de la colisión. [1,73 m/s; -54,65º]

27) Una bala, de 25 g, se mueve horizontalmente con una velocidad de 1.200 m/s y atraviesa un objeto, de masa 350 kg y espesor 30 cm, y sale con una velocidad de 900 m/s. El objeto con el que choca se puede mover libremente sin rozamiento sobre una superficie horizontal. Calcula: a) el tiempo que tarda la bala en atravesar el objeto y la fuerza media que este ejerce sobre la bala; b) la velocidad del objeto después de que la bala haya salido. [a) $2,86\cdot10^{-4}$ s; -26.223,8 N; b) 0,021 m/s]

28) Un objeto, de masa 2 kg, se encuentra en la parte superior de la esfera de radio R = 1 m. Se deja caer, sin rozamiento, por la esfera describiendo un arco de circunferencia, hasta que deja de estar en contacto con la esfera y cae libremente con una velocidad $v_{máx}$. Calcule: a) la aceleración tangencial, la velocidad y la fuerza normal de la esfera sobre el objeto, cuando el ángulo barrido en la caída sea de 10º; b) el ángulo total barrido en la caída hasta que deje de estar en contacto con la esfera, así como la velocidad $v_{máx}$ que posee en ese instante. [a) a_t = 1,7 m/s^2; v = 0,55 m/s; F_n = 18,71 N; b) $\theta_{máx}$ = 48,2º; $v_{máx}$ = 2,556 m/s]



29) Un objeto de masa 2 kg está atado al extremo de una cuerda, de 2 m de longitud, y el otro extremo de la cuerda está atado en el centro de una plataforma giratoria. La plataforma empieza a girar (v_0 = 0) rápidamente con el objeto colocado de tal forma que no gira con ella, pero sometido a la fuerza de rozamiento con la plataforma, siendo su sentido el opuesto al movimiento relativo del objeto con respecto a la plataforma. La tensión máxima que puede soportar la cuerda es de 100 N, y el coeficiente de rozamiento cinético entre el objeto y la plataforma es μ_k = 0,1. Determine: a) la aceleración centrípeta máxima y la velocidad máxima, relativa a la plataforma, que puede alcanzar el objeto antes de que se rompa la cuerda; b) la aceleración tangencial de la plataforma y el tiempo que ha de transcurrir para que el objeto alcance la velocidad máxima, relativa a la plataforma. [a) a_c = 50 m/s^2; v = 10 m/s; b) a_t = 0,98 m/s^2; t = 10,2 s]



30) Un objeto de masa 80 kg está colocado a 3 m del centro de una plataforma giratoria que está rotando. Debido a la rotación su velocidad aumenta debido a la aceleración de 0,4 m/s^2, partiendo del reposo. El coeficiente de fricción estática entre el objeto y la plataforma es μ_s = 0,3. Determine la velocidad crítica para que el objeto empiece a deslizarse sobre la plataforma y el tiempo que ha de transcurrir. [2,97 m/s; 7,425 s]

31) Un objeto de masa m_1 = 3 kg, se está deslizando sobre una superficie horizontal con una velocidad de 2 m/s cuando experimenta una colisión directa con otro objeto de masa m_2 = 2 kg, que está en reposo. La colisión es perfectamente elástica. Determine: a) la velocidad de cada objeto justamente después de la colisión; b) la distancia entre los objetos cuando los objetos de paran después de deslizarse, sabiendo que el coeficiente de rozamiento cinético entre los objetos y la superficie horizontal es μ_k = 0,3. [a) v_1' = 0,4 m/s; v_2' = 2,4 m/s; b) 0,9523 m]

32) Un objeto cae desde una altura de 180 m y, al cabo de 3 s, explota dividiéndose en dos fragmentos de igual masa $m_1 = m_2$. El fragmento m_1 sale con velocidad horizontal al eje +X de 20 m/s. Calcule: a) la velocidad del fragmento m_2 cuando sale y su dirección; b) la posición del fragmento 1 cuando el fragmento 2 alcanza el suelo. [a) v_2 = 62,1 m/s y a 251º respecto a eje X; b) P_1(39,6 m; 116,7 m)].

33) Un proyectil explota en el punto más alto de su trayectoria resultando dos fragmentos A y B. El fragmento A, de masa 2 kg, sale horizontalmente con una velocidad doble a la que tenía el proyectil en el momento de la explosión (v_{CM}). Determine la velocidad de salida del fragmento B e indique cuál de los dos fragmentos alcanza antes el suelo. Haz un esquema de las trayectorias. (Resolver el problema para valores de 1, 2 y 4 kg de la masa del fragmento B). [$v_A = 2v_{CM}$; $v_{B(1)} = -v_{CM}$; $v_{B(2)} = 0$; $v_{B(4)} = ½\cdot v_{CM}$; $t_A = t_B$]

34) Un patinador de 70 kg, en reposo sobre una pista de hielo, lanza un objeto de 10 kg con una velocidad horizontal de 10 m/s en el sentido positivo del eje OX. El coeficiente de rozamiento patín-hielo es de 0,1. Determinar: a) la velocidad del patinador 0,2 s después del lanzamiento; b) velocidad del objeto respecto del centro de masas patinador-objeto, en ese mismo instante. Dato: g = 10 m/s^2. [a) v_x = -1,23m/s; b) v_x = 9,83m/s; v_y = -1,715 m/s].

35) Una cañón, de masa 1.300 kg, lanza una bala de masa 72 kg en una dirección horizontal con una velocidad relativa al cañón de 55 m/s. ¿Cuál es la velocidad de retroceso del cañón respecto de la Tierra y la velocidad de la bala respecto de la Tierra?.[-2,9 y 52 m/s]

36) Una bala de masa m_b = 3,50 g se dispara horizontalmente. La bala atraviesa un objeto de masa m_1 = 1,20 kg, que está en reposo, y luego se incrusta en otro objeto de masa m_2 = 1,80 kg, que también está en reposo. El primer objeto adquiere una velocidad de v'_1 = 0,630 m/s y el segundo, con la bala en su interior, adquiere una velocidad de v''_2 = 1,40 m/s. Calcula: a) la velocidad de la bala inmediatamente después de salir del primer bloque; b) la velocidad inicial de la bala. [v'_b = 721 m/s; b) v_b = 937 m/s]

37) Dos bolas, de masas m_1 = 1 kg y m_2 = 2 kg, impactan mediante una colisión inelástica y oblicua a la línea de impacto. Si consideramos la línea de impacto el eje X las velocidades son: $\vec{v}_1 = 3\frac{m}{s}\cdot\cos 30^o\,\vec{i} + 3\frac{m}{s}\cdot\operatorname{sen} 30^o\,\vec{j}$, para la primera y $\vec{v}_2 = -1\frac{m}{s}\cdot\cos 45^o\,\vec{i} - 1\frac{m}{s}\cdot\operatorname{sen} 45^o\,\vec{j}$, para la segunda. El coeficiente de restitución vale e = 0,75. Determine las velocidades de las bolas después del impacto así como los ángulos que forman con la línea de impacto. [v'_1 = 1,96 m/s a 130º y v'_2 = 1,41 m/s a 329,1º]

38) Una bola de acero de masa m y velocidad v, que se desliza sin rozamiento por un plano horizontal, choca contra una pared vertical fija con un ángulo de incidencia θ. Suponiendo que el choque es perfectamente elástico, obtenga la expresión de las componentes normal y tangencial del momento lineal p (cantidad de movimiento) después del choque, en función de m, v y θ. Haga lo mismo para la energía cinética. [$p'_n = -mv\cos\theta$; $p'_t = mv\operatorname{sen}\theta$]

39) Una bola de acero se desliza sin rozamiento por un plano horizontal, choca contra una pared vertical fija con un ángulo de incidencia. Suponga que el choque es inelástico con un coeficiente de restitución $e = \frac{|v'_n|}{|v_n|}$, siendo e el cociente entre los valores de la componente normal de la velocidad después y antes del choque. En el caso completamente elástico e = 1, y e = 0 en el caso completamente inelástico. En general se tendrá $0 \le e \le 1$). Calcule: a) la energía cinética perdida por la bola en el choque si la masa de esta es de 78 g, la velocidad incidente de 0,045 m/s, el ángulo de incidencia θ = 15º y e = 0,80; b) el ángulo de salida de la bola. [a) -2,65·10^{-5} J; b) -18,5º]

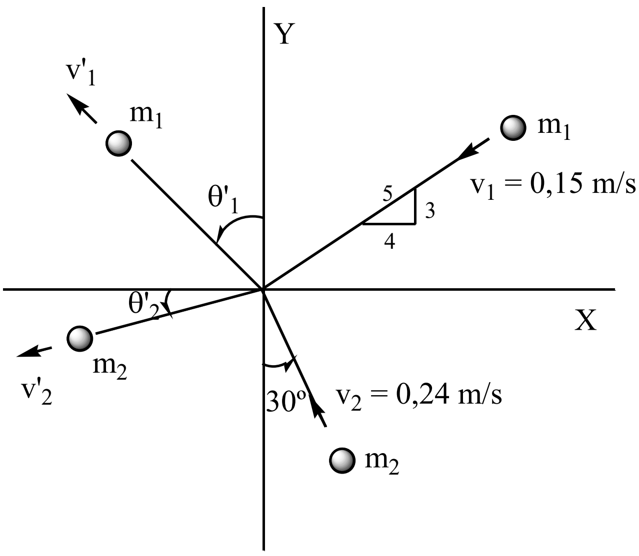
40) Una bola de acero pende de un hilo formando un ángulo con la vertical, constituyendo un péndulo simple. Al caer choca con la pared y lo hace en el punto más bajo de su trayectoria. El ángulo inicial del péndulo respecto de la vertical es $\theta = 0{,}52\,\text{rad}$, y el coeficiente de restitución tiene un valor de e = 0,80. Calcule el ángulo de retroceso que alcanza la bola después del choque. [0,414 rad]

41) Considera dos bolas de acero, de masas m_1 y m_2, la 1 colgada por un hilo, de longitud l, forma un ángulo θ con la vertical, y la 2 está en su posición más baja, y ambas en reposo. Se suelta la bola 1. Calcule: a) la velocidad de la bola 1 antes de impactar con la bola 2; b) las velocidades de las dos bolas después del choque, considerando éste perfectamente elástico. En el caso en que el choque no sea completamente elástico, se define el coeficiente de restitución e como el cociente entre los módulos de las velocidades relativas de ambas esferas después y antes del choque $e = -\frac{v'_2 - v'_1}{v_2 - v_1}$, $0 \le e \le 1$. Calcule: c) las velocidades después del choque para e < 1. d) ¿Qué relación ha de existir entre m_1, m_2 y e para que la primera bola retroceda después del choque?. e) ¿Qué ocurre para e = 1 y $m_1 = m_2$?. f) Demostrar, calculando su velocidad final, que en el caso completamente inelástico las dos bolas salen juntas después del choque. [a) $v_1 = \sqrt{2gl(1-\cos\theta)}$; b) $v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}$; $v_2' = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$; c) $v_1' = \frac{(m_1 - em_2)v_1}{m_1 + m_2}$; $v_2' = \frac{(1+e)m_1 v_1}{m_1 + m_2}$; d) $m_1 < em_2$; e) $v_1' = 0$]

42) Considera el dispositivo de cinco bolas iguales, de masa m. Separamos la bola 1 de la vertical un ángulo θ, y la soltamos. Determine el movimiento resultante en el caso en que e = 1, y en el caso en que los choques entre las bolas no sean perfectamente elásticos (e < 1). ¿Depende la velocidad final de la primera bola del número de bolas? ¿Y la velocidad final de la última bola?.

43) Demostrar que en un choque perfectamente elástico entre dos partículas la energía cinética total antes del choque, $E_c = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$, es igual a la energía cinética total después del choque, $E_c' = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2$. [$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2$].

44) Dos bolas, que tienen la misma masa, se deslizan sobre una superficie con el movimiento especificado en la gráfica, experimentando una colisión elástica. Determina la velocidad de cada una después de la colisión. Dato: el eje X se establece dentro del plano de contacto y el eje Y a lo largo de la línea de impacto. [$v'_1 = 0{,}240$ m/s; $\theta'_1 = 30º$; $v'_2 = 0{,}15$ m/s; $\theta'_2 = 37º$]

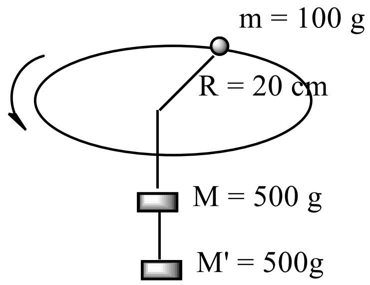


45) Dos bolas, de igual masa cada una, impactan mediante una colisión inelástica y oblicua a la línea de impacto. La primera se mueve por el eje X, siendo su velocidad $v_{1x} = -6$ m/s. La segunda se mueve con velocidad $v_2 = 4$ m/s y siendo su vector velocidad $\vec{v}_2 = 4\frac{m}{s}\times\frac{3}{5}\vec{i} + 4\frac{m}{s}\times\frac{4}{5}\vec{j}$. Determine: a) las velocidades de las bolas después del impacto, así como los ángulos que forman con la línea de impacto, si el coeficiente de restitución vale e = 0,75; b) el coeficiente de restitución si después de la colisión la bola 2 viaja a lo largo de una línea a 120º del eje X. [a) $v'_{1x} = 1{,}35$ m/s sobre eje +X; $v'_{2x} = -4{,}95$ m/s; $v'_{2y} = v_{2y} = 3{,}2$ m/s; $v'_2 = 5{,}90$ m/s a 147º; b) e = 0,012]

46) Un cuerpo de 0,5 kg se lanza hacia arriba por un plano inclinado, que forma 30º con la horizontal, con una velocidad inicial de 5 m/s. El coeficiente de rozamiento es 0,2. a) Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, cuando sube y cuando baja por el plano, y calcule la aceleración en la subida y la altura máxima alcanzada por el cuerpo. b) Determine la aceleración en la bajada y la velocidad con la que el cuerpo vuelve al punto de partida. [a) a = -6,6 m/s^2; h = 0,19 m; b) a' = 3,2 m/s^2; v = 1,56 m/s]

47) En una atracción ferial los pasajeros van dentro de un anillo cilíndrico que está rotando, y cuando el anillo alcanza una determinada velocidad de giro se coloca en un plano vertical. El anillo tiene un radio de 8 m y rota en el plano vertical con un período de 4,5 s. Calcule: a) la fuerza que el anillo realiza sobre un pasajero de 55 kg cuando en el giro va por la parte superior, y luego la misma fuerza pero cuando este va por la parte inferior del giro; b) el mayor período de rotación que ha de tener la rueda cilíndrica girando para prevenir que ningún pasajero caiga desde la parte superior. Dato: g = 9,8 m/s^2. [a) 318,80 N; 1.396,80 N; b) 5,677 s]

48) Una masa de 100 g gira describiendo círculos de radio 20 cm sobre una mesa sin rozamiento. La cuerda que lo sujeta pasa a través de un hueco en el centro de la mesa y está unido a dos pesas de 500 g cada una. a) Calcule la velocidad que debe llevar la masa m girando para soportar a las dos pesas. b) Suponemos que se corta la cuerda que sujeta la masa M' y cae mientras la masa m sigue girando, cuál será la nueva velocidad de giro de m y su nuevo radio de giro. Dato: g = 9,8 m/s^2. [a) v = 4,427 m/s; b) v' = 3,5138 m/s; R' = 25,2 cm]



49) Desde el suelo se lanza un proyectil de 10 kg con una velocidad inicial de 100 m/s y formando un ángulo de 60º con la horizontal. En el punto más alto de su trayectoria explota en dos fragmentos A y B. El fragmento A, de 2 kg, sale horizontalmente con una velocidad triple a la que tenía el proyectil en el momento de la explosión. Determine: a) la velocidad de salida de los fragmentos después de la explosión; b) el alcance horizontal de cada fragmento desde el lugar de la explosión. Dato: g = 9,8 m/s^2. [a) v_{Ax} = 150 m/s; v_{Bx} = 25 m/s; b) t_{caer} = 8,837 s; Δx_A = 1.325,55 m; Δx_B = 220,925 m]

<u>Problemas de «Vibraciones»</u>

1) Una partícula sobre un muelle oscila con un período de 0,80 s y una amplitud de 0,10 m. Al tiempo t = 0, está a 5 cm de la posición de equilibrio y moviéndose hacia –A. Determina: a) la ecuación del movimiento oscilatorio; b) la posición y la dirección del movimiento en el instante de tiempo t = 2,0 s. [a) $x = 0{,}10\cdot\cos(2{,}5\pi t + \tfrac{2}{3}\pi)$; b) x = +0,05 m; v = +0,68 m/s]

2) Una partícula, de masa 0,500 kg, oscila sobre un muelle y se observa que se encuentra en el punto x = 0,15 m en el tiempo inicial t = 0. Alcanza el desplazamiento máximo de 0,25 m en el tiempo t = 0,300 s. Determina: a) la ecuación del movimiento y dibuja la gráfica posición-tiempo; b) el instante, durante el primer ciclo, en que la masa pasa por el punto x = 0,20 m. [a) $x = 0{,}25\cdot\cos(\pi t - 0{,}3\pi)$; b) 0,1·s; 0,5·s]

3) Una partícula de 0,5 kg que describe un movimiento armónico simple de frecuencia $\frac{5}{\pi}$ Hz, tiene inicialmente una energía cinética de 0,2 J y una energía potencial de 0,8 J. Calcule: a) la posición y velocidad inicial, así como la amplitud de la oscilación y la velocidad máxima. b) Haga un análisis de las transformaciones de energía que tienen lugar en un ciclo completo. c) ¿Cuál sería el desplazamiento en el instante en que las energías cinética y potencial son iguales?. [a) x = 0,179 m; v = -0,892 m/s; A = 0,20 m; 2,0 m/s; c) x = 0,1414 m]

4) Un cuerpo realiza un movimiento vibratorio armónico simple. a) Escriba la ecuación del movimiento si la aceleración máxima es $5\cdot\pi^2$ cm/s^2, el período de las oscilaciones 2 s y la elongación del cuerpo al iniciarse el movimiento 2,5 cm y siendo la velocidad negativa. b) Represente gráficamente la elongación y la velocidad en función del tiempo y comente la gráfica. [a) $x = 5\cdot\cos(\pi\cdot t + \pi/3)$ cm; b) $v = -5\cdot\pi\cdot\text{sen}(\pi\cdot t + \pi/3)$ cm/s]

5) Una masa de 200 g cuelga de un muelle colocado verticalmente de k = 10 N/m. La masa se estira hacia abajo hasta un punto donde el muelle está a 30 cm de su longitud sin estirar y sin la masa. En esa posición estirada se suelta. Determina: a) la distancia de la posición de equilibrio; b) la amplitud de las oscilaciones; c) la posición de la masa a los 3 s y respecto a la posición de equilibrio; d) la velocidad de la masa a los 3s. [a) $\Delta l = 19{,}6$ cm; b) A = 10,4 cm; c) y = 7,4 cm por encima de la posición de equilibrio; b) v = 51,6 cm/s]

6) Un objeto de 0,2 kg, unido al extremo de un resorte, efectúa oscilaciones armónicas de 0,1 π s de período y su energía cinética máxima es de 0,5 J. a) Escriba la ecuación de movimiento del objeto y determine la constante elástica del resorte. b) Explique cómo cambiarían las características del movimiento si: i) se sustituye el resorte por otro de constante elástica doble; ii) se sustituye el objeto por otro de masa doble. [a) k = 80 N/m; $x = 0{,}1118\cdot\cos(20\cdot t)$; b)]

7) a) ¿Qué características debe tener una fuerza para que al actuar sobre un cuerpo le produzca un movimiento armónico simple?. b) Represente gráficamente el movimiento armónico simple de una partícula dado por: $y = 5\cos(10t + \pi/2)$ (S I) y otro movimiento armónico que tenga una amplitud doble y una frecuencia mitad que el anterior.

8) Una partícula de 50 g vibra a lo largo del eje X, alejándose como máximo 10 cm a un lado y a otro de la posición de equilibrio (x = 0). El estudio de su movimiento ha revelado que existe una relación sencilla entre la aceleración y la posición que ocupa en cada instante: $a = -16\cdot\pi^2 x$. a) Escriba las expresiones de la posición y de la velocidad de la partícula en función del tiempo, sabiendo que este último se comenzó a medir cuando la partícula pasaba por la posición x = 10 cm. b) Calcule las energías cinética y potencial de la partícula cuando se encuentra a 5 cm de la posición de equilibrio. [a) $x = 0{,}10\cdot\cos(4\pi t)$; $v = -0{,}4\pi\cdot\text{sen}(4\pi t)$; b) $E_c = 0{,}0296$ J; $E_p = 0{,}00987$ J]

9) Una partícula de 0,2 kg describe un movimiento armónico simple a lo largo del eje x, de frecuencia 20 Hz. En el instante inicial la partícula pasa por el origen, moviéndose hacia la derecha, y su velocidad es máxima. En otro instante de la oscilación la energía cinética es 0,2 J y la energía potencial es 0,6 J. a) Escriba la ecuación de movimiento de la partícula y calcule su aceleración máxima. b) Explique, con ayuda de una gráfica, los cambios de energía cinética y de energía potencial durante una oscilación. [a) $x = 0{,}0005\cdot\cos(40\pi t - \frac{1}{2}\pi)$; $a_{máx} = 8$ m/s^2]

10) Un movimiento armónico simple viene descrito por la ecuación $x(t) = A\cdot\text{sen}(\omega t + \delta)$. a) Escriba la velocidad y la aceleración de la partícula en función del tiempo y explique cómo varían a lo largo de una oscilación. b) Deduzca las expresiones de las energías cinética y potencial en función de la posición y explique sus cambios a lo largo de la oscilación.

11) Un cuerpo realiza un movimiento vibratorio armónico simple. a) Escriba la ecuación del movimiento si la aceleración máxima es $10\cdot\pi^2$ cm/s^2, el período de las oscilaciones $T = 1\cdot$s y la elongación del cuerpo al iniciarse el movimiento 2 cm y la velocidad positiva. b) Represente gráficamente la elongación y la velocidad en función del tiempo y comente la gráfica. [a) $x = 2{,}5\cdot\cos(2\pi\cdot t - 0{,}20\pi)$ cm; b) $v = -5\cdot\pi\cdot\text{sen}(2\pi\cdot t - 0{,}20\pi)$ cm/s]

12) a) Describa el movimiento armónico simple y comente sus características cinemáticas y dinámicas. b) Una masa oscila verticalmente suspendida de un muelle. Describa los tipos de energía que intervienen y sus respectivas transformaciones.

13) Un cuerpo, situado sobre una superficie horizontal lisa y unido al extremo de un resorte, efectúa un movimiento armónico simple y los valores máximos de su velocidad y aceleración son 0,6 m/s y 7,2 m/s^2 respectivamente. a) Determine el período y la amplitud del movimiento. b) Razone cómo variaría la energía mecánica del cuerpo si se duplicara: i) la frecuencia; ii) la aceleración máxima. [a) T = 0,5236 s; A = 0,05 m; b) i) $E' = 4\cdot E_t$]

14) Un bloque de 0,5 kg cuelga del extremo inferior de un resorte de constante elástica k = 72 N/m. Al desplazar el bloque verticalmente hacia abajo de su posición de equilibrio comienza a oscilar, pasando por el punto de equilibrio con una velocidad de 6 m/s. a) Razone los cambios energéticos que se producen en el proceso. b) Determine la amplitud y la frecuencia de la oscilación. [a) La E_c oscila entre 0 y 9 J; la E_p oscila entre 2,45 J y 11,45 J; la E_t = 11,45 J; b) A = 0,5 m; ω = 12 rad/s]

Modelos de preguntas del examen de dinámica

20) Un ciclista va a realizar un giro llamado el "rizo de la muerte" en el que realiza un giro por una carretera colocada perpendicularmente. Si el radio del rizo es de 2,7 m, ¿cuál es la velocidad menor que puede tener el ciclista para que pueda permanecer en contacto con el rizo?. [5,14 m/s]

21) Un coche viaja a una velocidad constante de 20 m/s por una carretera circular llana de radio 190 m. ¿Cuál es el valor mínimo del coeficiente μ_s estático entre los neumáticos del coche y la carretera para prevenir que el coche se deslice?. [0,21]

22) En una carretera en la que no hay fricción, por ejemplo, sobre hielo, un coche se mueve con una velocidad constante de 20 m/s alrededor de una curva con peralte. Si el radio es de 190 m ¿cuál es el ángulo que deberá tener el peralte si no hay rozamiento?. [12º]

24) a) Calcula la aceleración a_A con la que cae un objeto A, de masa m_A = 5 kg, que está en la rampa de un plano inclinado de 20º con la horizontal, siendo el coeficiente de rozamiento de μ_A = 0,20. b) Calcula la aceleración a_B con la que cae por el plano inclinado si se pone un segundo objeto B, de masa m_B =10 kg, y de coeficiente de rozamiento μ_B = 0,15. c) Calcula la aceleración con la que cae el objeto A si está por encima y pegado el objeto B. d) Determina el tiempo que tarda en caer una distancia de 2 m el objeto A si parte del reposo. [a) a_A = 1,51 m/s^2; b) a_B = 1,97 m/s^2; c) a = 1,81 m/s^2; d) 1,50 s]

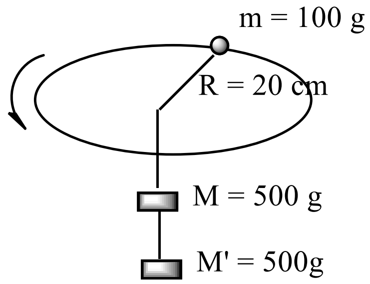
33) Un proyectil explota en el punto más alto de su trayectoria resultando dos fragmentos A y B. El fragmento A, de masa 2 kg, sale horizontalmente con una velocidad doble a la que tenía el proyectil en el momento de la explosión (v_{CM}). Determine la velocidad de salida del fragmento B e indique cuál de los dos fragmentos alcanza antes el suelo. Haz un esquema de las trayectorias. (Resolver el problema para valores de 1, 2 y 4 kg de la masa del fragmento B). [$v_A = 2v_{CM}$; $v_{B(1)} = -v_{CM}$; $v_{B(2)} = 0$; $v_{B(4)} = ½\cdot v_{CM}$; $t_A = t_B$]

35) Una cañón, de masa 1.300 kg, lanza una bala de masa 72 kg en una dirección horizontal con una velocidad relativa al cañón de 55 m/s. ¿Cuál es la velocidad de retroceso del cañón respecto de la Tierra y la velocidad de la bala respecto de la Tierra?.[-2,9 y 52 m/s]

36) Una bala de masa m_b = 3,50 g se dispara horizontalmente. La bala atraviesa un objeto de masa m_1 = 1,20 kg, que está en reposo, y luego se incrusta en otro objeto de masa m_2 = 1,80 kg, que también está en reposo. El primer objeto adquiere una velocidad de v'_1 = 0,630 m/s y el segundo, con la bala en su interior, adquiere una velocidad de v''_2 = 1,40 m/s. Calcula: a) la velocidad de la bala inmediatamente después de salir del primer bloque; b) la velocidad inicial de la bala. [v'_b = 721 m/s; b) v_b = 937 m/s]

37) Dos bolas, de masas m_1 = 1 kg y m_2 = 2 kg, impactan mediante una colisión inelástica y oblicua a la línea de impacto. Si consideramos la línea de impacto el eje X las velocidades son: $\vec{v}_1 = 3\frac{m}{s}\cdot\cos 30º\,\vec{i} + 3\frac{m}{s}\cdot \text{sen}\, 30º\,\vec{j}$, para la primera y $\vec{v}_2 = -1\frac{m}{s}\cdot\cos 45º\,\vec{i} - 1\frac{m}{s}\cdot \text{sen}\, 45º\,\vec{j}$, para la segunda. El coeficiente de restitución vale e = 0,75. Determine las velocidades de las bolas después del impacto así como los ángulos que forman con la línea de impacto. [v'_1 = 1,96 m/s a 130º y v'_2 = 1,41 m/s a 329,1º]

48) Una masa de 100 g gira describiendo círculos de radio 20 cm sobre una mesa sin rozamiento. La cuerda que lo sujeta pasa a través de un hueco en el centro de la mesa y está unido a dos pesas de 500 g cada una. a) Calcule la velocidad que debe llevar la masa m girando para soportar a las dos pesas. b) Suponemos que se corta la cuerda que sujeta la masa M' y cae mientras la masa m sigue girando, cuál será la nueva velocidad de giro de m y su nuevo radio de giro. Dato: g = 9,8 m/s^2. [a) v = 4,427 m/s; b) v' = 3,5138 m/s; R' = 25,2 cm]



49) Desde el suelo se lanza un proyectil de 10 kg con una velocidad inicial de 100 m/s y formando un ángulo de 60º con la horizontal. En el punto más alto de su trayectoria explota en dos fragmentos A y B. El fragmento A, de 2 kg, sale horizontalmente con una velocidad triple a la que tenía el proyectil en el momento de la explosión. Determine: a) la velocidad de salida de los fragmentos después de la explosión; b) el alcance horizontal de cada fragmento desde el lugar de la explosión. Dato: g = 9,8 m/s^2. [a) v_{Ax} = 150 m/s; v_{Bx} = 25 m/s; b) t_{caer} = 8,837 s; Δx_A = 1.325,55 m; Δx_B = 220,925 m]

1) Una partícula sobre un muelle oscila con un período de 0,80 s y una amplitud de 0,10 m. Al tiempo t = 0, está a 5 cm de la posición de equilibrio y moviéndose hacia –A. Determina: a) la ecuación del movimiento oscilatorio; b) la posición y la dirección del movimiento en el instante de tiempo t = 2,0 s. [a) $x = 0{,}10\cdot\cos(2{,}5\pi t + \frac{2}{3}\pi)$; b) x = +0,05 m; v = +0,68 m/s]

2) Una partícula, de masa 0,500 kg, oscila sobre un muelle y se observa que se encuentra en el punto x = 0,15 m en el tiempo inicial t = 0. Alcanza el desplazamiento máximo de 0,25 m en el tiempo t = 0,300 s. Determina: a) la ecuación del movimiento y dibuja la gráfica posición-tiempo; b) el instante, durante el primer ciclo, en que la masa pasa por el punto x = 0,20 m. [a) $x = 0{,}25\cdot\cos(\pi t - 0{,}3\pi)$; b) 0,1·s; 0,5·s]