3.- «Interacción Gravitatoria»

3.1 La gravitación universal

Historia de las teorías acerca de los movimientos planetarios

Modelo geocéntrico: Considera la Tierra en el centro del Universo y las estrellas pegadas a una esfera celestial que rota alrededor de un eje que pasa a través de los polos Norte y Sur de la Tierra y de los polos celestiales Norte y Sur. Sin embargo, el movimiento retrógrado del planeta Marte no se comprendía con este modelo y fue el problema durante 2000 años. Hiparco (150 a.C.) propuso un sistema de círculos para explicar el movimiento retrógrado. Consideraba que un planeta rotando en forma de **epiciclos** (círculo que se suponía descrito por un planeta alrededor de un centro que se movía en el deferente) alrededor de una **curva deferente** (círculo que se suponía descrito alrededor de la Tierra por el centro del epiciclo de un planeta). Posteriormente, Ptolomeo (100 a.C.) introdujo refinamientos en el sistema epiciclos -deferente- que se utilizó hasta el siglo XVI.

Modelo heliocéntrico: Nicolás **Copérnico** (1473-1543) desarrolló un modelo más sencillo para entender el Universo. Esto se debió a que con la obtención de nuevos datos observados y aplicarlos al modelo geocéntrico era necesario introducir modificaciones a las trayectorias de los planetas. Copérnico se plantea que las dificultades tenían su origen en la teoría y propone el modelo heliocéntrico que sirve para calcular las posiciones planetarias y que tiene como objetivo eliminar las dificultades del sistema de Ptolomeo. El sistema de Copérnico lo que hizo fue cambiar el sistema de referencia, tomando el Sol como centro, que al tener una gran masa respecto de los otros planetas, hace que el nuevo sistema sea prácticamente inercial y, por tanto, más sencillo en su descripción.

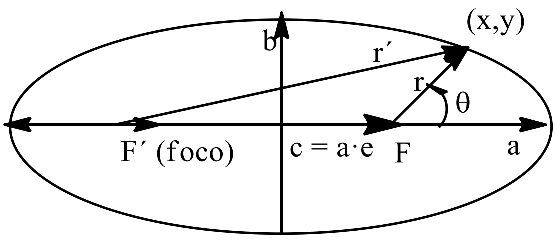
Johannes **Kepler** (1571-1630) publicó en 1609 las dos primera leyes del movimiento planetario, basándose en las observaciones astronómicas realizadas por su maestro Tycho Brahe (1546-1601). Las leyes de Kepler nos proporcionan una *descripción cinemática del movimiento planetario*, pero no nos informan por qué los planetas se mueven en aquel camino y no en otro.

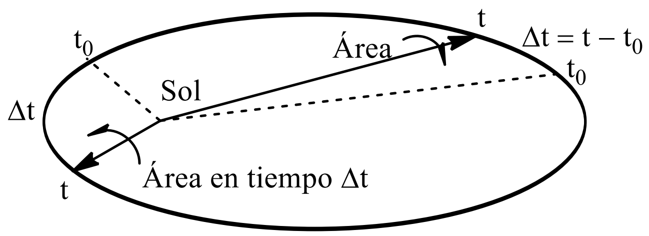
Leyes de Kepler:

1. Los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en un foco de la elipse.
2. El área barrida por el radio vector dibujado desde el Sol hasta un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.
3. El cuadrado del período orbital de un planeta es proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de la elipse de su órbita.

Características de la elipse:

Elipse con semieje mayor **a**, semieje menor **b** y distancia focal **c**. Ecuaciones de la elipse: **r´+ r = 2·a**; excentricidad de la elipse: $0 \leq e < 1$; distancia focal: $c = a \cdot e$. Si $r' = r \Rightarrow r = a \Rightarrow$ $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$





T (período): $T^2 \propto a^3$

Ecuación de la elipse n coordenadas cartesianas centradas en el origen: $\mathbf{x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1}$. En coordenadas polares:

$$\begin{cases} r'^2 = r^2 \operatorname{sen}^2\theta + \left(2ae + r\cos\theta\right)^2 = r^2 + 4ae\left(ae + r\cos\theta\right) \\ r'^2 = \left(2a - r\right)^2 = 4a^2 + r^2 - 4ar \end{cases} \Bigg\} \begin{cases} r^2 + 4ae\left(ae + r\cos\theta\right) = 4a^2 + r^2 - 4ar \\ r = \dfrac{a\left(1 - e^2\right)}{1 + e\cos\theta} \end{cases}$$

En 1623, Galileo (1564-1642), que tuvo relación con Kepler, verificó con ayuda de un telescopio que los satélites de Júpiter cumplían leyes análogas a las de Kepler, respecto de éste planeta. Sus trabajos colaboraron a la aceptación definitiva del Sistema Copernicano.

La órbita más elíptica es la de los planetas Mercurio y Plutón, la de los demás es prácticamente una circunferencia distorsionada. Una circunferencia es una elipse en la que los dos focos se han movido hacia el centro, constituyendo un solo foco, y la longitud del semieje mayor el radio. Como el estudio matemático de la elipse es más complicado que el de la circunferencia consideraremos órbitas circulares.

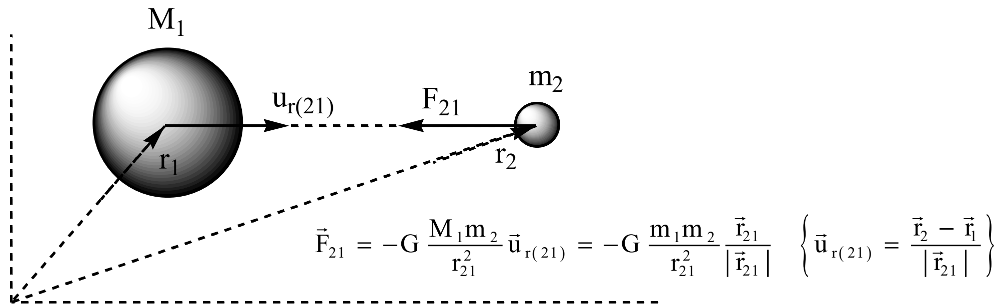
3.2 Ley de Newton de la gravitación universal

Las leyes de Kepler proporcionan una descripción de cómo se mueven los planetas, pero no explican por qué se mueven en aquel camino y no en otro. Newton fue capaz de encontrar una expresión que describe la fuerza a la que están sometidos los planetas en sus órbitas, usando las tres leyes de Kepler. **En 1666 Isaac Newton** (1642-1727) formuló la ley de Gravitación Universal que fue publicada en 1687 en su libro "Principios Matemáticos de la Filosofía Natural".

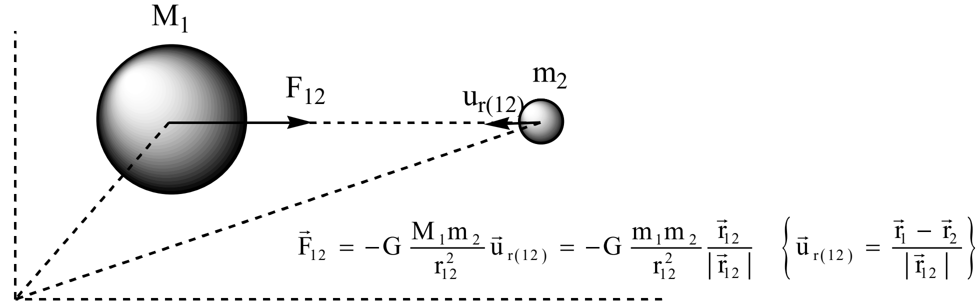
Enunciado de la **ley de gravitación universal**: «*la interacción gravitatoria, entre dos cuerpos, se expresa por una fuerza atractiva y central, directamente proporcional al producto de las masas de los cuerpos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos*»:

$$\boxed{\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}} \qquad \left\{G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \tfrac{N\cdot m^2}{kg^2}\right\}$$

El vector de posición tiene su **origen en el centro de masas de una masa** M y el extremo en el **centro de masas de la otra masa** m. La fuerza gravitatoria, tiene signo negativo, por ser atractiva y, por tanto, tiene sentido contrario al vector unitario que va de una masa a otra.



$$\vec{F}_{21} = -G\frac{M_1 m_2}{r_{21}^2}\vec{u}_{r(21)} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{21}^2}\frac{\vec{r}_{21}}{|\vec{r}_{21}|} \qquad \left\{\vec{u}_{r(21)} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_{21}|}\right\}$$



$$\vec{F}_{12} = -G\frac{M_1 m_2}{r_{12}^2}\vec{u}_{r(12)} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|} \qquad \left\{\vec{u}_{r(12)} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_{12}|}\right\}$$

Sean las masas M_1 y m_2, y las fuerzas F_{21} (fuerza atractiva que ejerce la masa M_1 sobre la masa m_2) y F_{12} (fuerza atractiva que ejerce la masa m_2 sobre la masa M_1):

$$\boxed{\vec{F}_{21} = -G\frac{M_1 m_2}{r_{21}^2}\vec{u}_{r(21)} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{21}^2}\frac{\vec{r}_{21}}{|\vec{r}_{21}|} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{21}^3}\vec{r}_{21}} \qquad \left\{\vec{u}_{r(21)} = \frac{\vec{r}_{21}}{|\vec{r}_{21}|} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_{21}|}\right\}$$

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -G\frac{M_1 m_2}{r_{12}^2}\vec{u}_{r(12)} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}} \qquad \left\{\vec{u}_{r(12)} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_{12}|}\right\}$$

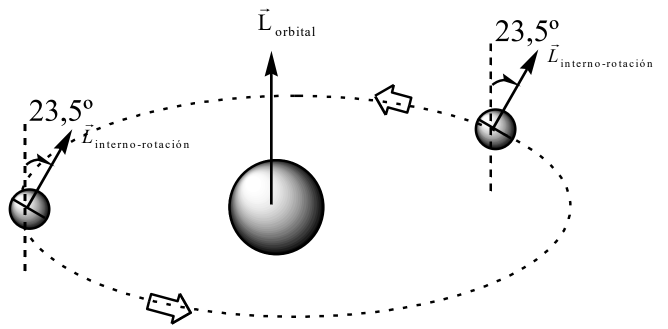
3.3 Dinámica de un sistema de dos partículas

3.3.1 Momento angular de un sistema de partículas

Para un sistema de dos partículas, de masas m_1 y m_2, el momento angular del sistema respecto del punto O, del sistema inercial OXY, será la suma de los momentos angulares de cada partícula respecto del mismo punto.

Lo que nos lleva, después del desarrollo matemático, al siguiente enunciado: «*El momento angular de un sistema de partículas es la suma del momento angular orbital, $L_{orbital}$, definido respecto del sistema inercial OXYZ (sistema-L), y del momento angular interno, $L_{interno}$, definido respecto del sistema centro de masas (sistema-C) que se toma como origen*»**.**

$$\begin{cases} \vec{L}_O = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = (\vec{r}_1 \times \vec{p}_1) + (\vec{r}_2 \times \vec{p}_2) \\ \vec{L}_O = \left[\vec{R}_{CM} \times M\vec{V}_{CM}\right] + \left[(\vec{r}_1' \times \vec{p}_1') + (\vec{r}_2' \times \vec{p}_2')\right] = \vec{L}_{orbital} + \vec{L}_{interno} \end{cases}$$



$$\vec{L}_O = \vec{L}_{orbital} + \vec{L}_{interno}$$

Demostración

$$\vec{L}_O = (\vec{r}_1 \times \vec{p}_1) + (\vec{r}_2 \times \vec{p}_2)$$
$$\vec{L}_O = \left[\left(\vec{R}_{CM} + \vec{r}_1'\right) \times m_1\left(\vec{V}_{CM} + \vec{v}_1'\right)\right] + \left[\left(\vec{R}_{CM} + \vec{r}_2'\right) \times m_2\left(\vec{V}_{CM} + \vec{v}_2'\right)\right]$$
$$\vec{L}_O = \vec{R}_{CM} \times \left[(m_1 + m_2)\vec{V}_{CM} + (m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2')\right] + (m_1\vec{r}_1' + m_2\vec{r}_2') \times \vec{V}_{CM} + (\vec{r}_1' \times \vec{p}_1') + (\vec{r}_2' \times \vec{p}_2')$$
$$\vec{L}_O = \vec{R}_{CM} \times (m_1 + m_2)\vec{V}_{CM} + (\vec{r}_1' \times \vec{p}_1') + (\vec{r}_2' \times \vec{p}_2') = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}_{CM} + (\vec{r}_1' \times \vec{p}_1') + (\vec{r}_2' \times \vec{p}_2')$$

$$\begin{Bmatrix} \vec{r}_1 = \vec{R}_{CM} + \vec{r}_1' \\ \vec{v}_1 = \vec{V}_{CM} + \vec{v}_1' \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \vec{r}_2 = \vec{R}_{CM} + \vec{r}_2' \\ \vec{v} = \vec{V}_{CM} + \vec{v}_2' \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} m_1\vec{r}_1' + m_2\vec{r}_2' = 0 \\ m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' = 0 \end{Bmatrix}$$

3.3.2 Relación del momento angular de un sistema de partículas con las fuerzas externas

Consideremos un sistema compuesto por dos masas (denominadas 1 y 2). Sobre la masa 1 se ejercen dos fuerzas, la externa y la interna (debida a la masa 2), y sobre la masa 2 se ejercen también dos fuerzas, la externa y la interna (debida a la masa 1). De tal forma que la variación del momento angular con respecto del tiempo de todo el sistema será:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{L}_1 + \vec{L}_2\right) = \frac{d\vec{L}_1}{dt} + \frac{d\vec{L}_2}{dt} = \left[\vec{r}_1 \times \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_{12}\right)\right] + \left[\vec{r}_2 \times \left(\vec{F}_2 + \vec{F}_{21}\right)\right]$$
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$

3.3.3 Teorema del momento cinético. Principio de conservación del momento angular

Teorema del momento cinético: «*La suma de los momentos de las fuerzas externas actuando sobre un sistema de partículas es igual a la velocidad de cambio con respecto del tiempo del momento angular del sistema*».

Esto tiene significado sólo si los vectores momento (torque) resultantes de las fuerzas externas y momento angular están referidos al mismo origen. En un sistema inercial se puede aplicar a cualquier punto. En un sistema acelerado (tal como una rueda girando) sólo se aplica al centro de masas del sistema.

<u>Principio de conservación del momento angular</u>: «*Si el momento neto de las fuerzas actuantes sobre un sistema de partículas es cero, el vector momento angular del sistema permanece constante, aunque dentro del sistema haya cambios*».

$$\left\{\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0\right\} \;\Rightarrow\; \left\{\frac{d}{dt}\left(\vec{L}_O\right) = 0\right\} \;\Rightarrow\; \vec{L}_O = \text{cte.}$$

El Principio de Conservación del Momento Angular implica que si en un sistema aislado el momento angular de alguna parte del sistema cambia por interacciones internas, el resto del sistema debe experimentar un cambio igual de momento angular pero opuesto.

El principio de conservación del momento angular va más allá de las limitaciones de la mecánica Newtoniana. Es válido para partículas cuyas velocidades se aproximan a la velocidad de la luz y también en el mundo de las partículas subatómicas. No se han encontrado excepciones.

Son ejemplos de conservación del momento angular:

- Patinador girando: un patinador girando sobre sí mismo que no esté sometido a un momento o torque exterior su momento angular permanece constante alrededor del eje de rotación, aunque varíe su velocidad angular alejándose los brazos del cuerpo.

- Estabilización de un satélite: Antes de lanzar un satélite de comunicaciones al espacio desde la bodega de la lanzadera espacial se le hace girar alrededor de su eje central. Esto se debe a que de la misma forma que la dirección del movimiento de una partícula es más difícil de cambiar por un impulso cuando el momento lineal de la partícula es grande que cuando es pequeño. De la misma forma la orientación de un objeto girando es más difícil de cambiar por un torque externo cuando el objeto tiene un momento angular grande que si es pequeño. La orientación de un satélite que no está girando puede ser alterada por pequeños momentos externos como presiones de radiación solares o pequeñas restos de atmósfera.

<u>3.3.4 Energía cinética de un sistema de partículas</u>

<u>Análisis de la energía cinética de una partícula</u>: Teorema trabajo-energía cinética: Si sobre una partícula, de masa m, realizamos una fuerza y la partícula experimenta un desplazamiento se define el trabajo realizado por la fuerza sobre la partícula:

$$W_{neto} = \int_i^f \vec{F}_{neta}\cdot d\vec{r} = \int_i^f \frac{d\vec{p}}{dt} d\vec{r} = \int_i^f \vec{v} d\vec{p} = \int_i^f m\vec{v} d\vec{v} = \tfrac{1}{2} m v_f^2 - \tfrac{1}{2} m v_i^2 = \Delta E_{cinética}$$

La energía cinética de un sistema de N partículas será la suma de las energías cinéticas de cada una de ellas.

Sea un sistema de dos partículas, de masas m_1 y m_2, si consideramos sus velocidades *referidas a un sistema inercial OXYZ*, la energía cinética del sistema será igual a la suma de las energías cinéticas de cada partícula: $E_c = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2$.

La energía cinética de cada partícula depende de la velocidad, y esta depende del sistema de referencia elegido, luego **la energía cinética de un sistema de partículas dependerá del sistema de referencia usado**.

Por tanto, si consideramos las velocidades, de cada partícula, *respecto del centro de masas* del sistema, la energía cinética interna será: $E'_c = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2$.

Siendo la **relación entre ellas**:

$$\left\{\begin{array}{l} E_c = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1\left(\vec{V}_{CM} + \vec{v}_1'\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\vec{V}_{CM} + \vec{v}_2'\right)^2 \\ E_c = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\vec{V}_{CM}^2 + \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2'^2 + \vec{V}_{CM}\left(m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'\right) \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} m_1\vec{r}_1' + m_2\vec{r}_2' = 0 \\ m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' = 0 \end{array}\right\}$$

$$E_c = \frac{1}{2}M\vec{V}_{CM}^2 + E'_c = E_{c(\text{traslación})} + E'_{c(\text{interna})}$$

«*La Energía Cinética de un sistema de partículas puede expresarse como la suma de la energía cinética orbital, asociada con el movimiento del centro de masas, y de la energía cinética interna, relativa al centro de masas*»**.**

Es importante entender claramente que **la energía cinética interna es una propiedad del cuerpo, independiente del observador** y distinta de la energía cinética de traslación del sistema.

3.4 Fuerzas centrales. Justificación formal del movimiento de los planetas usando el principio de conservación del momento angular

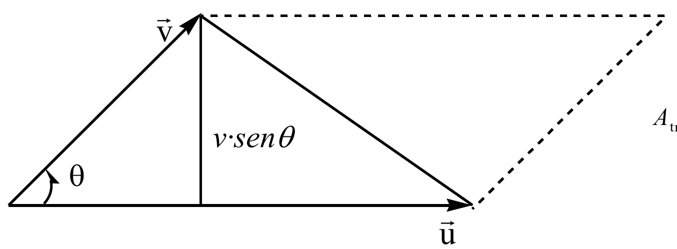
En base a las leyes de Kepler obtenemos lo siguiente:

1. Los planetas describen **órbitas cerradas** alrededor del Sol por lo que la causa es una **fuerza atractiva**, ya que si fuese repulsiva la órbita no sería cerrada.

2. El **radio vector**, desde el Sol a un planeta, **barre áreas iguales en tiempos iguales** significa que su **velocidad areolar ha de ser constante** ($v_{aerolar}$ = dÁrea/dt = dA/dt = constante), lo que supone que **el momento angular del planeta** respecto del Sol sea constante ($L_{planeta/Sol}$ = cte.), lo que implica que **el momento de la fuerza gravitatoria sobre el planeta sea cero** y *la fuerza ha de ser central*.

Demostración: Se llama velocidad areolar a la derivada del área respecto del tiempo. Si A es el área barrida por el radio vector desde el Sol a un planeta: $v_{areolar} = \frac{dA}{dt}$. La velocidad areolar si es constante, implica que el momento angular del planeta respecto del Sol ha de ser constante.

Si consideramos dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, que forman un ángulo *θ*, el área del paralelogramo formado por los dos vectores es el módulo del producto vectorial de los dos vectores: $A_{paralelogramo} = |\vec{u}\times\vec{v}| = u\cdot v\cdot \text{sen}\,\theta$. Y el área del triángulo formado por los dos vectores es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores: $A_{triángulo} = \frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}| = \frac{1}{2}u\cdot v\cdot\text{sen}\,\theta$. Así:

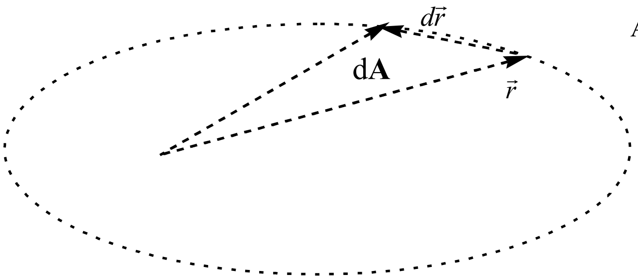


El área del triángulo formado por dos vectores:

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{u\cdot v\,\text{sen}\,\theta}{2} = \frac{1}{2}u\cdot v\cdot\text{sen}\,\theta = \frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|$$

Ahora vamos a considerar el área del triángulo barrido por el radio vector durante el movimiento del planeta alrededor de la órbita, $|d\vec{A}| = \frac{1}{2}|\vec{r}\times d\vec{r}|$, su variación con respecto del tiempo es la velocidad areolar que es constante, lo que supone que el momento angular también sea constante:

$$\boxed{v_{areolar} = \left|\frac{d\vec{A}}{dt}\right| = cte = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\vec{v}\right| = \frac{1}{2}\frac{\left|\vec{L}\right|}{m} = cte \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{L}\right| = \left|\vec{r}\times m\vec{v}\right| = cte}$$



Área del triángulo formado por los vectores **r** y d**r**

$$\left|d\vec{A}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times d\vec{r}\right|$$

$$\left|\vec{v}_{areolar}\right| = cte. = \left|\frac{d\vec{A}}{dt}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\vec{v}\right|$$

$$\left|\vec{v}_{areolar}\right| = cte. = \frac{1}{2}\frac{\left|\vec{L}\right|}{m} \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{L}\right| = mrv_t = cte$$

La segunda ley de Kepler implica que el momento angular de los planetas ha de ser constante, por lo que la fuerza causante del movimiento ha de ser central, es decir, paralela al radio vector:

$$\left|\vec{L}\right| = cte. \quad \Rightarrow \quad \frac{d\left|\vec{L}\right|}{dt} = 0 = \left|\vec{r}\times\vec{F}^{ext}\right| = \left|\vec{M}\right| = \left|\vec{r}\right|\left|\vec{F}^{ext}\right| sen\,\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{matrix} sen\,\theta = 0 \\ \theta = 0, \pi \end{matrix}\right\} \quad \vec{r} \parallel \vec{F}_{ext}$$

La fuerza ha de ser paralela al radio vector y es lo que se llama una fuerza central. Por tanto, la fuerza que ejerce el Sol sobre un planeta es una fuerza atractiva y central, es decir, que actúa a lo largo de la línea que une los dos cuerpos.

Otro aspecto, muy importante, es determinar *la relación de la fuerza y del radio vector* o distancia entre los dos cuerpos. Newton determinó, realizando una serie de cálculos matemáticos, que **para que las órbitas de los planetas sean elípticas la fuerza ha de ser proporcional al inverso del cuadrado de la distancia entre el Sol y el planeta**.

Si asumimos que la fuerza gravitatoria es una propiedad universal de toda la materia, podemos considerar que la fuerza está asociada con la "cantidad de materia" o masa gravitatoria, en cada cuerpo. **En 1798 Cavendish** determinó la constante de proporcionalidad, que se conoce con el nombre de constante de gravitación universal y que no depende del medio. El valor de la constante de gravitación universal es igual a: $\mathbf{G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$.

3ª) Para comprobar la 3ª ley de Kepler, vamos a consideremos órbitas circulares, en las cuales se ha de cumplir que **la fuerza centrípeta de la Tierra es igual a la fuerza gravitatoria**:

$$\left\{\begin{matrix} F_{centrípeta} = F_{gravitatoria} \\ -m\frac{v^2}{r}\vec{u}_r = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} v^2 = G\frac{M}{r} \\ v = \omega r = \frac{2\pi}{T}r \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} G\frac{M}{r} = \frac{4\pi^2}{T^2}r^2 \\ T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}r^3 \end{matrix}\right.$$

3.5 El principio de equivalencia entre la masa inercial y la masa gravitatoria

La masa inercial se obtiene de las leyes de la dinámica de Newton

$$\left\{\begin{matrix} \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \\ m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = -\frac{\vec{a}_2}{\vec{a}_1} \Rightarrow m_{inercial} = \frac{F}{a}$$

Si le damos a una masa un valor unidad, se determinan las masas inerciales de las demás comparándolas con las aceleraciones que experimentan al aplicarles la misma fuerza.

La masa gravitatoria se obtiene de la ley de la gravitación universal de Newton. La masa gravitatoria de un objeto se puede determinar midiendo la fuerza atractiva ejercida sobre él por otro de masa M, que se encuentra a una distancia r:

$$F_g = G\frac{Mm_g}{r^2} \quad \Rightarrow \quad m_g = \frac{r^2F_g}{GM}$$

En la definición de masa gravitatoria no entra aceleración.

Newton ya consideraba que no había diferencia entre las dos masas, *la afirmación de que la masa inercial es igual a la masa gravitatoria se llama principio de equivalencia*. La masa inercial es equivalente a la masa gravitatoria. El principio de equivalencia se ha sometido a la experiencia, y se ha demostrado que si hay diferencia ha de ser menor que 10 partes en un billón.

Es un hecho muy probado que **todos los cuerpos caen en la superficie de la Tierra con la misma aceleración**. Este hecho es indicativo de que la masa gravitatoria y la masa inercial son iguales. Si la masa gravitatoria m_g fuese distinta de la masa inercial m_i la fuerza gravitatoria en la superficie de la Tierra (peso) sería:

$$\left|\vec{F}_{peso}\right| = m_i g_0 = G\frac{M_T m_g}{R_T^2} \qquad \Rightarrow \quad g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2}\frac{m_g}{m_i}$$

Si la relación entre las dos masas no fuera la misma para todos los cuerpos la aceleración de la gravedad, g_0, sería diferente para cada cuerpo, lo que es contrario a la experiencia. Las dos masas, son indistinguibles experimentalmente y, por tanto, la magnitud masa es para la masa inercial o la masa gravitatoria.

La masa de la Tierra y la aceleración de la gravedad:

Se puede determinar de dos maneras:

1) La masa de la Tierra a partir de la relación entre la aceleración de la gravedad y la masa de la Tierra. Se determina a partir de los datos experimentales conocidos: G, g_0 y R_T. Ahora bien, el peso de un cuerpo, en la superficie de la Tierra, que es la fuerza con que la Tierra lo atrae, depende de la latitud porque la aceleración de la gravedad depende de ella. La aceleración de la gravedad es menor en el ecuador que en los polos, hecho conocido desde el siglo XVII después de la invención del reloj de péndulo, los científicos franceses encontraron que los relojes enviados a la Guayana Francesa, en la costa norte de América del Sur, van más lentos que sus homólogos de París.

Además, las mediciones de la aceleración de la gravedad en el ecuador deben tener en cuenta también la rotación del planeta con una velocidad angular $\omega = 2\cdot\pi/T_{sideral}$, siendo el período de un día sideral de 23h 56min 04s y no 24h. Por ello cualquier objeto que se encuentre en reposo en la superficie de la Tierra está rotando y describe una trayectoria circular alrededor del eje de rotación de la Tierra, siendo la aceleración centrípeta en el ecuador de 0,0339 m/s^2:

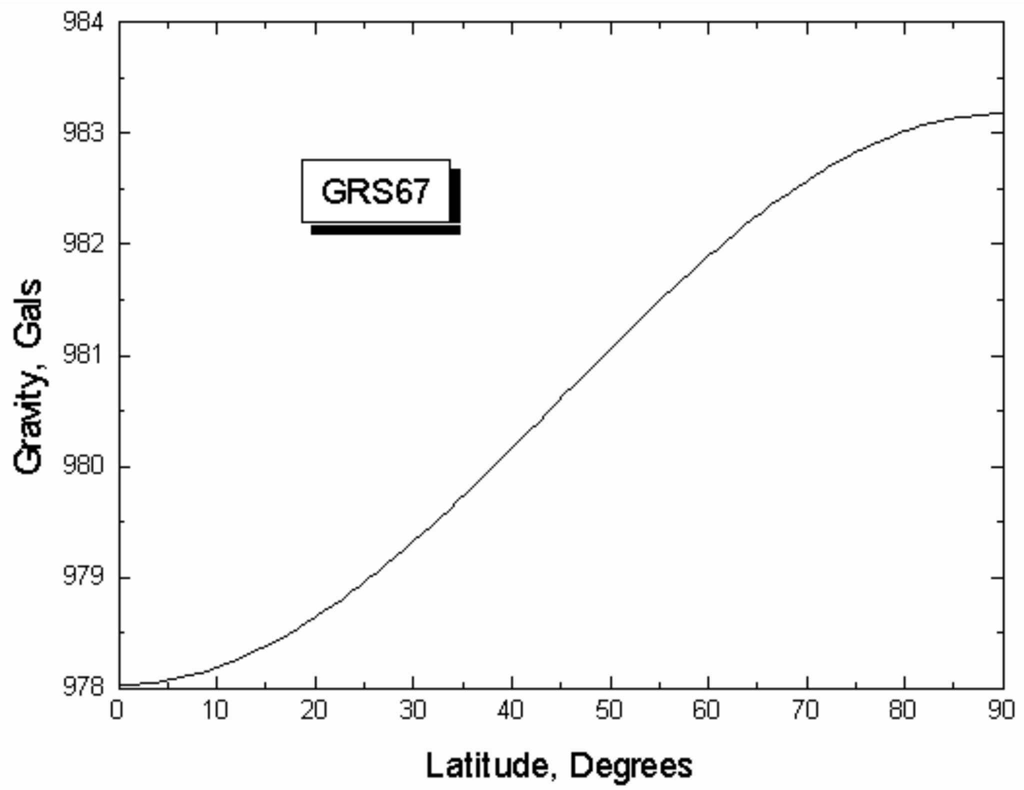
$a_{centrípeta(Ecuador)} = \omega^2\cdot R_T = (2\cdot\pi/T)^2\cdot R_T = (2\cdot\pi/86.164 \text{ rad/s})^2\times 6.378.137 \text{ m} = 0,03392 \text{ m/s}^2$.

Por tanto, la aceleración de la gravedad (g) de la Tierra es menor que si esta no rotase (g_0). Siendo el valor en el ecuador: $g_{rotando} = g_{0(sin\text{-}rotar)} - a_{centrípeta}$. Lo que hace que en el **ecuador** la aceleración gravitatoria eficaz tiene un valor de $\mathbf{g_{rotando} = 9{,}7803\ m/s^2}$, esto significa que la verdadera aceleración gravitatoria en el ecuador debe ser $\mathbf{g_{0(sin\text{-}rotar)} = 9{,}8142\ m/s^2}$ = 9,7803 m/s^2 + 0,0339 m/s^2.

Sin embargo, en los polos, donde no hay aceleración centrífuga la aceleración gravitatoria real es $\mathbf{g_{polos} = 9{,}8321\ m/s^2}$, que es mayor que la de 9,8142 m/s^2 que corresponde al ecuador sin rotación de la Tierra. Esto se debe a que la Tierra está achatada por los polos y un objeto en el ecuador está a más distancia del centro de la Tierra que si está en el polo, concretamente en el ecuador está a 21,384 km más alejado del centro, siendo el radio ecuatorial de 6.378.137 m y el radio polar de 6.356.752,3 m.

En resumen, hay dos causas que contribuyen a que la aceleración efectiva de la gravedad sea menor en el ecuador que en los polos. Alrededor del **70%** de la diferencia se debe a que la Tierra está rotando y el **30%** restante a la forma no esférica de la Tierra.

La fórmula internacional de la aceleración de la gravedad, en función de la latitud, forma de la Tierra y de la altura: $\boxed{g = 9,780327\left(1 + 0,0053024 \cdot \text{sen}^2 \lambda - 0,0000058 \cdot \text{sen}^2 2\lambda\right) - 3,086 \cdot 10^{-6} h}$



Por lo que para determinar **el valor de la masa de la Tierra** sería conveniente determinar la aceleración de la gravedad, g, estando la Tierra en reposo:

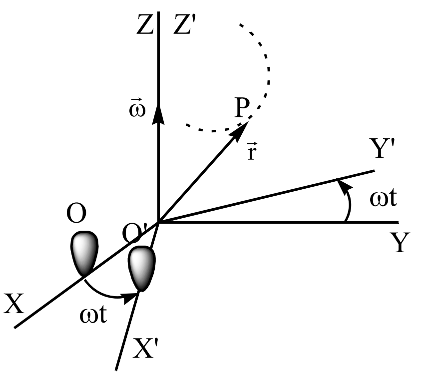
$$F_{g(\text{sin-rotar})} = G\frac{M_T m}{R_T^2} = m g_{\text{sin-rotar}} \qquad \left\{ \begin{array}{l} g_{\text{sin-rotar(ecuador)}} = g_{\text{rotando(ecuador)}} + \omega^2 R_T \cos^2\lambda \\ g_{\text{sin-rotar(ecuador)}} = 9,7803\,\tfrac{m}{s^2} + 0,03392\,\tfrac{m}{s^2} = 9,8142\,\tfrac{m}{s^2} \end{array} \right\}$$

$$\boxed{M_T = \frac{g_{\text{sin-rotar}} R_T^2}{G} = \frac{9,8142\,\tfrac{m}{s^2} \times (6.378.137\,m)^2}{6,67 \cdot 10^{-11}\,\tfrac{N \cdot m^2}{kg^2}} = 5,98 \cdot 10^{24}\,kg}$$

Para determinar el valor de la aceleración de la gravedad en función de la latitud hemos de considerar que la Tierra está rotando con una velocidad angular constante, luego la superficie de la Tierra es un sistema no inercial ya que posee aceleración.

Considera dos observadores O y O’ en movimiento de rotación relativo y no en movimiento de traslación relativo. Para simplificar consideramos que están en el mismo punto, por lo que el observador O detecta que O’ está rotando con velocidad angular (ω). Sin embargo, el observador O’ comprueba que O está rotando con velocidad angular −ω. Sea una partícula en el punto P, de vector de posición $\vec{r}$, la velocidad de P medida por O es $\vec{v}_O = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_O$.

Si la partícula P está en reposo relativo al observador O’, para el observador O parece moverse en un círculo con velocidad angular, ω, por lo que tiene una velocidad relativa a O dada por la expresión $\vec{v}_O = \vec{\omega}\times\vec{r}$. Si la partícula P, observada por O’, se mueve con una velocidad $\vec{v}'_{O'} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{O'}$, entonces la velocidad de la partícula P relativa a O debe ser $\vec{v}_O = \vec{v}'_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{r}$.



$$\vec{v}_O = \vec{v}'_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{r} \quad\Rightarrow\quad \vec{a}_O = \frac{d\vec{v}_O}{dt} = \left(\frac{d\vec{v}'_{O'}}{dt}\right)_O + \vec{\omega}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_O$$

$$\begin{cases} \left(\frac{d\vec{v}'_{O'}}{dt}\right)_O = \left(\frac{d\vec{v}'_{O'}}{dt}\right)_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{v}'_{O'} = \vec{a}'_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{v}'_{O'} \\ \vec{\omega}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_O = \vec{\omega}\times\vec{v}_O = \vec{\omega}\times\left(\vec{v}'_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{r}\right) = \vec{\omega}\times\vec{v}'_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r} \end{cases}$$

$$\vec{a}_O = \vec{a}'_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{v}'_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{v}'_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r} = \vec{a}'_{O'} + 2\vec{\omega}\times\vec{v}'_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\vec{a}'_{O'} = \vec{a}_O - 2\vec{\omega}\times\vec{v}'_{O'} - \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}$$

Esta expresión, $\vec{v}_O = \vec{v}'_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{r}$, relaciona las velocidades $\vec{v}_O$ y $\vec{v}'_{O'}$, de la misma partícula, pero medidas por dos observadores O y O’, en movimiento de rotación relativo con velocidad angular ω. Esto sería el ejemplo de dos observadores que usan el centro de un carrusel como origen, uno de ellos rotando con el carrusel y otro en reposo al lado del carrusel.

La relación entre la aceleración de P medida por O, $\vec{a}_O$, y por O’, $\vec{a}'_{O'}$, es un poco más complicada

$$\vec{a}_O = \vec{a}'_{O'} + 2\vec{\omega}\times\vec{v}'_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r} \quad\Rightarrow\quad \vec{a}'_{O'} = \vec{a}_O - 2\vec{\omega}\times\vec{v}'_{O'} - \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}$$

El segundo término es llamado **aceleración de Coriolis** (1792-1843), y el tercero corresponde a la **aceleración centrífuga**. Las dos aceleraciones, la de Coriolis y la centrífuga, son el resultado del movimiento de rotación relativo de los observadores. *No son aceleraciones debidas a una acción específica aplicada sobre la partícula*.

$$\left.\begin{cases} \vec{v}_O = \vec{v}'_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{r} \\ \vec{a}_O = \frac{d\vec{v}_O}{dt} = \left(\frac{d\vec{v}'_{O'}}{dt}\right)_O + \vec{\omega}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_O \end{cases}\right\} \begin{cases} \left(\frac{d\vec{v}'_{O'}}{dt}\right)_O = \left(\frac{d\vec{v}'_{O'}}{dt}\right)_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{v}'_{O'} = \vec{a}'_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{v}'_{O'} \\ \vec{\omega}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_O = \vec{\omega}\times\vec{v}_O = \vec{\omega}\times\left(\vec{v}'_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{r}\right) = \vec{\omega}\times\vec{v}'_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r} \end{cases}$$

$$\vec{a}_O = \vec{a}'_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{v}'_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{v}'_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r} = \vec{a}'_{O'} + 2\vec{\omega}\times\vec{v}'_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\boxed{\vec{a}'_{O'} = \vec{a}_O - 2\vec{\omega}\times\vec{v}'_{O'} - \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}}$$

Una de las aplicaciones más interesantes de las ecuaciones del movimiento de rotación relativo, es el estudio del movimiento de un cuerpo relativo a la Tierra. Es importante para el movimiento de huracanes, balística y satélites. La velocidad angular de la Tierra es $\omega = \frac{2\pi}{T} = 7{,}272 \cdot 10^{-5}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Su dirección es el eje de rotación de la Tierra. Considera un punto A sobre la superficie de la Tierra y llamamos g_0 la aceleración de la gravedad medida por un observador O no rotante. Entonces g_0 corresponde a la aceleración en el sistema no rotante, por lo que la aceleración medida por un observador O' rotando con la Tierra es:

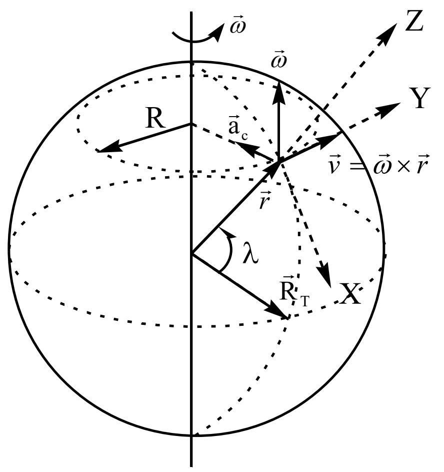
$$\vec{a}'_{O'} = \vec{g}_0 - \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}'_{O'}$$

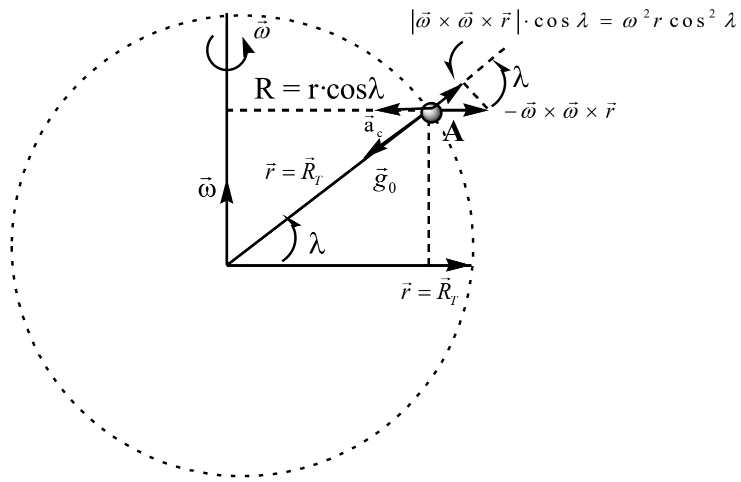
Esta ecuación nos indica que la aceleración de un cuerpo relativa a la Tierra depende de la velocidad relativa a la Tierra, $\vec{v}'_{O'}$, y de la posición del cuerpo, $\vec{r}$. La aceleración centrífuga ($\equiv$ 0,0336 m/s^2) y la de Coriolis ($\equiv 7{,}3 \cdot 10^{-5} \cdot v'_{O'}$ m/s^2), así para velocidades inferiores a ($0{,}033/7{,}3 \cdot 10^{-5}$) 400 m/s (1.500 km/h) la aceleración de Coriolis será cero respecto a la aceleración centrípeta. Sin embargo es importante el efecto direccional.

Aceleración centrífuga: Considera un cuerpo inicialmente en reposo, o en movimiento muy lento, de tal forma que el término de Coriolis, $\left(-2\vec{\omega} \times \vec{v}'_{O'}\right)$, sea cero, cuando se compara con el término de la aceleración centrífuga $\left(-\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}\right)$. La aceleración medida $\vec{a}'_{O'}$ se llama la aceleración efectiva de la gravedad $\vec{g}$: $\vec{g} = \vec{g}_0 - \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}$. La aceleración centrífuga se dirige hacia fuera, como se demuestra en la figura.

Si consideramos que la Tierra es esférica y que no hay anomalías locales, consideramos que $\vec{g}_0$ apunta hacia el centro de la Tierra a lo largo de la dirección radial, por lo que la dirección de $\mathbf{\vec{g}} = \mathbf{\vec{g}}_0 - \boldsymbol{\vec{\omega}} \times \boldsymbol{\vec{\omega}} \times \mathbf{\vec{r}}$, llamada la vertical, se desvía ligeramente de la dirección radial, y se determina por la línea de la plomada. Los líquidos en equilibrio en reposo tienen su superficie perpendicular a $\vec{g}$. Sin embargo, para los efectos prácticos, y en ausencia de perturbaciones locales se puede considerar que la vertical coincide con la dirección radial hacia el centro de la Tierra. Al ser la magnitud de $\vec{g}$ ligeramente menor que la de $\vec{g}_0$, puede expresarse el módulo de $|\vec{g}|$ como la diferencia entre el módulo de $|\vec{g}_0|$ y $|\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}| \cdot \cos\lambda$, que es la componente del vector aceleración centrífuga sobre el eje radial:

$$\boxed{g = g_0 - |\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}| \cdot \cos\lambda = g_0 - \omega^2 r \cos^2\lambda = g_0 - \omega^2 R_T \cos^2\lambda}$$





$$\boxed{\vec{g}_{\text{rotando}} = \vec{g}_{\text{sin-rotar}} - \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

$$\begin{cases} \left|\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)\right| = \omega^2 r \cos\lambda = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \cos\lambda \\ \left|\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)\right| = \left(\frac{2\pi}{86.164}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 \times 6.378.137\,\text{m} \times \cos\lambda = 0{,}03392 \cdot \cos\lambda\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{cases}$$

$$\left|\vec{g}_{\text{rotando}}\right| \approx \left|\vec{g}_{\text{sin-rotar}}\right| - \left|\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}\right|\cdot\cos\lambda = \left|\vec{g}_{\text{sin-rotar}}\right| - \omega^2 r\cos\lambda\cdot\cos\lambda = \left|\vec{g}_{\text{sin-rotar}}\right| - \omega^2 r\cos^2\lambda$$

$$\left|\vec{g}_{\text{rotando}}\right|_{\text{ecuador}} = 9,7803\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} = \left|\vec{g}_{\text{sin-rotar}}\right|_{\text{ecuador}} - 0,03392\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$g_{\text{sin-rotar(ecuador)}} = 9,7803\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} + 0,03392\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9,8142\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

La fórmula internacional de la gravitación, en función de la latitud, forma de la Tierra y de la altura:

$$\boxed{g = 9,780327\left(1 + 0,0053024\cdot\text{sen}^2\lambda - 0,0000058\cdot\text{sen}^2 2\lambda\right) - 3,086\cdot 10^{-6}h}$$

Latitud 90º (Polo N)	Latitud 0º (Ecuador)
g = 9,8321 m/s²	g = 9,7803 m/s²

2) La masa de la Tierra a partir del período de rotación de un satélite y del radio de la órbita:

$$\left\{\begin{matrix} \left|\vec{F}_c\right| = \left|\vec{F}_g\right| \\ ma_c = mg \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} ma_c = mg \\ a_c = \omega^2 r = g = G\dfrac{M_T}{r^2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow M_T = \frac{\omega^2 r^3}{G} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{r^3}{G}$$

Peso de un cuerpo si la Tierra está en reposo o si la Tierra está rotando:

Al ser la aceleración centrípeta mucho más pequeña que la gravedad la diferencia la hacemos de forma escalar en vez de vectorial:

$$\vec{g}_{\text{rotando}} = \vec{g}_{\text{sin-rotar}} - \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r} \quad \left\{\left|\vec{g}_{\text{rotando}}\right| \approx \left|\vec{g}_{\text{sin-rotar}}\right| - \left|\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}\right|\cdot\cos\lambda = \left|\vec{g}_{\text{sin-rotar}}\right| - \omega^2 r\cos\lambda\cdot\cos\lambda\right.$$

$$g_{\text{sin-rotar(ecuador)}} = g_{\text{rotando(ecuador)}} + \left|\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)\right|_{\text{ecuador}} = 9,7803\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} + 0,03392\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9,8142\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\vec{F}_{\text{neta}} = m\vec{a} \quad \left\{\begin{matrix} -mg_{\text{rotando}} + F_{n(\text{rotando})} = 0 \\ -mg_{\text{sin-rotar}} + F_{n(\text{sin-rotar})} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} F_{n(\text{rotando})} = mg_{\text{rotando}} \\ F_{n(\text{sin-rotar})} = mg_{\text{sin-rotar}} \end{matrix}\right.$$

3.6 Teoría de la gravitación de Newton

1. Una fuerza especificada por la ley de la gravedad: $F_g = -G\dfrac{Mm}{r^2}$.

2. El principio de equivalencia entre la masa inercial y la masa gravitatoria.

3. Una afirmación de que las tres leyes del movimiento de Newton son universales. Estas leyes son válidas para los cuerpos celestes, los planetas y las estrellas, así como para los objetos terrestres.

3.7 Concepto de fuerza conservativa y de energía potencial

1. En cada punto de un campo de fuerzas conservativo se define un escalar, energía potencial, que depende solamente de las coordenadas de ese punto, constituyendo un campo escalar asociado al vectorial, cuya relación es: $\boxed{\vec{F}\cdot d\vec{r} = -dE_p = -\vec{\nabla}E_p\cdot d\vec{r} \quad\Rightarrow\quad \vec{F} = -\vec{\nabla}E_p}$. El signo menos se considera en sentido físico: la fuerza se dirige hacia los puntos del campo en los que decrece la energía potencial, en sentido contrario al vector gradiente que apunta hacia donde aumenta la energía potencial. Por lo que en los campos de fuerzas conservativos coexisten dos campos, el campo vectorial de las fuerzas y el campo escalar de la energía potencial. Siendo las líneas de fuerza del campo vectorial perpendiculares a las superficies de nivel de la energía potencial.

2. En un campo de fuerzas conservativo la circulación a través de una trayectoria cerrada es cero: $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

3. En un campo escalar, asociado a un campo de fuerzas conservativo, lo único que está definido es la diferencia de energía potencial entre dos puntos, ya que la energía potencial de un punto queda indeterminado por una constante: $\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dE_p$.

3.7.1 La fuerza gravitatoria es conservativa. Energía potencial gravitatoria

La *fuerza gravitatoria* que viene dada por la ley de gravitación universal es conservativa ya que depende de la distancia entre las masas, $\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r$, y el **trabajo** realizado **por el campo gravitatorio** sobre un cuerpo de masa m se invierte en incrementar la energía potencial del cuerpo:

$$W = \int_1^2 \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = \int_1^2 -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r d\vec{r} = \left[G\frac{Mm}{r}\right]_1^2 = G\frac{Mm}{r_2} - G\frac{Mm}{r_1} = -\Delta E_{p(g)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_{p(g)} = -G\frac{Mm}{r}}$$

$$W = \int_1^2 \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = \int_i^f -dE_{p(g)} = -\left[E_{p(g)}\right]_1^2 = -\left(E_{p(2)} - E_{p(1)}\right) = -\Delta E_{p(g)}$$

<u>En las proximidades de la superficie terrestre la fuerza gravitatoria cambia poco con la altura</u>:

$$\vec{F}_{g(R_T \gg h)} = -G\frac{M_T m}{\left(R_T + h\right)^2}\vec{u}_r \approx -G\frac{M_T m}{R_T^2}\vec{u}_r \approx -mg_0\vec{u}_r$$

$$W = \int_1^2 \vec{F}_{g(R_T \gg h)} \cdot d\vec{r} = -mg_0\int_1^2 \vec{u}_r \cdot d\vec{r} = -mg_0\left[y\right]_1^2 = -mg_0\Delta y = -\Delta E_{p(g)} \quad \left\{E_{p(g)} = mg_0 y = mg_0 h\right\}$$

3.7.2 Campo gravitatorio: intensidad del campo gravitatorio y potencial gravitatorio

Se llama Campo Gravitatorio a la situación física por la cual al colocar una masa en dicho campo ésta experimenta una interacción o fuerza gravitatoria. Siendo el campo gravitatorio un campo vectorial de fuerzas.

Campo gravitatorio creado por una masa M: Sea una masa M, en un punto del espacio, y colocamos otra masa, m, en diferentes posiciones del espacio alrededor de M. Debido a la interacción gravitatoria entre las dos masas, la masa m experimenta una fuerza en cada posición dada por la ley de gravitación universal. Es decir, que la interacción entre las masas, m y M, va a depender de sus posiciones relativas. Por lo que, en cada punto del espacio podemos definir un vector **intensidad del campo gravitatorio**, creado por la masa M.

En cada punto del campo vectorial gravitatorio, se define un vector llamado **intensidad del campo gravitatorio**, que se define como la fuerza por unidad de masa que coloquemos en dicho punto, siendo la unidad $N \cdot kg^{-1} = m/s^2$:

$$\boxed{\vec{g} = \lim_{m \to 0}\frac{\vec{F}}{m} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r}$$

La intensidad del campo gravitatorio, producido por M, en un punto del espacio, es una magnitud vectorial, cuyo vector tiene su origen es ese punto del campo y la dirección y sentido hacia el centro de masas de la masa M.

La **intensidad del campo gravitatorio** en un punto del campo gravitatorio depende del vector de posición de dicho punto, por lo que **el campo gravitatorio es conservativo.** Por lo tanto, la circulación del campo gravitatorio no depende de la trayectoria elegida sino de los puntos inicial y final y la circulación a lo largo de una trayectoria cerrada será cero. Decimos entonces que en cada punto del campo gravitatorio hay definido un **potencial gravitatorio.**

Potencial gravitatorio: El potencial gravitatorio es la magnitud escalar asociada, en cada punto del campo, al vector intensidad del campo gravitatorio o campo gravitatorio

$$\vec{g}\cdot d\vec{r} = -dU = -\vec{\nabla}U\cdot d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{g} = -\vec{\nabla}U$$

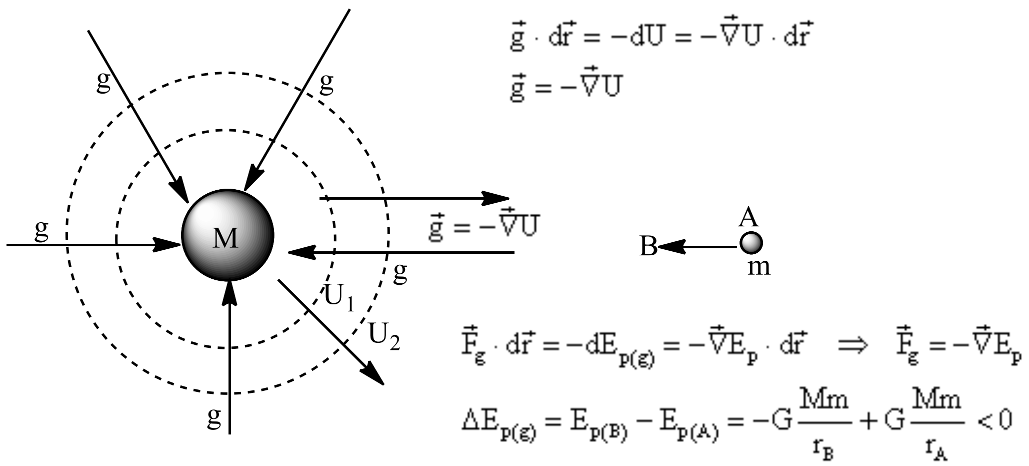
Demostramos que el campo gravitatorio es conservativo haciendo la circulación: $C = \oint \vec{g}\cdot d\vec{r} = 0$

$$C = \int_1^2 \vec{g}\cdot d\vec{r} = \int_1^2 \left(-G\frac{M}{r^2}\right)\vec{u}_r\cdot d\vec{r} = \left[G\frac{M}{r}\right]_1^2 = G\frac{M}{r_2} - G\frac{M}{r_1} = -\Delta U = -\left(U_2 - U_1\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{U = -G\frac{M}{r}}$$

El potencial gravitatorio U se mide en N·m/kg = J/kg.

La Representación gráfica un campo gravitatorio se hace mediante las líneas de fuerza. Una línea de fuerza se dibuja de tal forma que en cada punto la dirección del campo es tangente a la línea que pasa a través del punto. Por convenio, las líneas de fuerza se dibujan de tal forma que su densidad es proporcional a la intensidad del campo.

El campo gravitatorio, alrededor de una masa M, tiene las líneas de fuerza radiales y dirigidas hacia la masa M y las superficies de nivel o superficies equipotenciales del campo gravitatorio, debido a una masa M, tienen simetría esférica.



3.7.3 Energía potencial gravitatoria de una masa puntual

Si colocamos una masa, m, en un punto del espacio donde existe un campo gravitatorio, la fuerza que experimenta es el producto del valor de la masa m, que es escalar, por el vector intensidad del campo gravitatorio en ese punto: $\vec{F}_g = m\vec{g}$. La fuerza tiene la dirección y sentido de la intensidad del campo gravitatorio en ese punto. Al ser el campo gravitatorio conservativo, la fuerza gravitatoria, es una fuerza conservativa. Por lo que en cada punto de un campo vectorial de fuerzas gravitatorias, podemos definir un potencial escalar, asociado a dicha fuerza, llamado energía potencial gravitatoria. Deducción:

$$W_{por-campo} = -W_{contra-campo} = \int_1^2 \vec{F}_g\cdot d\vec{r} = \int_1^2 \left(-G\frac{Mm}{r^2}\right)\vec{u}_r\cdot d\vec{r} = \left[G\frac{Mm}{r}\right]_1^2 = G\frac{Mm}{r_2} - G\frac{Mm}{r_1} = -\Delta E_{p(g)}$$

$$W_{por-campo} = -W_{contra-campo} = m\int_1^2 \vec{g}\cdot d\vec{r} = m(-\Delta U) = -\Delta E_{p(g)} \quad \Rightarrow \quad E_{p(g)} = mU = -G\frac{Mm}{r}$$

La **energía potencial gravitatoria** $E_{p(g)} = -G\frac{Mm}{r} = mU$, es una propiedad del sistema de dos partículas y no de una de ellas. No hay forma de dividir esta energía y saber lo que le corresponde a una partícula y cuanto a la otra. Sin embargo, si una de las masas es muy superior a la otra (M >> m) se habla de la energía potencial de la menor m.

3.7.4 Campo gravitatorio y potencial gravitatorio debido a varias masas puntuales

Si tenemos una distribución de masas puntuales M_1, M_2, M_3, ...M_n, para hallar el campo y el potencial gravitatorios, en un punto del espacio, aplicamos el **Principio de Superposición**: El campo gravitatorio producido, por un conjunto discreto de masas, en un punto del campo, es la suma vectorial de los campos gravitatorios debidos a cada una de las masas, en ese punto. El potencial gravitatorio, en el mismo punto del campo, se obtiene por la suma escalar de los potenciales gravitatorios debidos a cada una de las masas

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + ... = \sum_{i=1}^{n}\vec{g}_i = \left(-G\frac{M_1}{r_1^2}\vec{u}_{r_1}\right) + \left(-G\frac{M_2}{r_2^2}\vec{u}_{r_2}\right) + ... = \sum_{i=1}^{n}\left(-G\frac{M_i}{r_i^2}\vec{u}_{r_i}\right)$$

$$U = U_1 + U_2 + ... = \sum_{i=1}^{n} U_i = \left(-G\frac{M_1}{r_1}\right) + \left(-G\frac{M_2}{r_2}\right) + ... = \sum_{i=1}^{n}\left(-G\frac{M_i}{r_i}\right)$$

La **fuerza gravitatoria** obedece el principio de superposición, que nos dice que la fuerza total sobre una partícula, de masa m, situada en un punto es la suma de las fuerzas ejercidas sobre ella por todas las demás partículas consideradas al mismo tiempo; la **energía potencial** para un sistema de partículas será la suma de las energías potenciales de cada par de partículas:

$$\vec{F} = m(\vec{g}_1 + \vec{g}_2 + ...) = m\sum_{i=1}^{n}\vec{g}_i = m\vec{g} \quad \Rightarrow \quad E_p = m(U_1 + U_2 + ...) = m\sum_{i=1}^{n} U_i = mU$$

3.8 Teorema de Gauss para el campo gravitatorio

Gauss (1777-1855) relaciona los campos en una superficie gaussiana (superficie cerrada) y la masa que hay dentro de la superficie.

Concepto de flujo del campo gravitatorio: el flujo (de fluir) del campo gravitatorio, a través de una superficie, se define como el producto escalar de la intensidad del campo gravitatorio por el vector superficie (es un vector cuya magnitud es igual al área y cuya dirección es normal al plano del área). Luego el flujo del campo depende de tres factores: del valor de la magnitud intensidad del campo, del valor del área de la superficie y del ángulo entre los vectores respectivos (o de las orientaciones relativas).

Expresiones del flujo a través de una superficie plana, S, y a través de una superficie irregular, que la dividimos en diferenciales de superficie dS:

$$\Phi = \vec{g}\cdot\vec{S} = |\vec{g}|\cdot|\vec{S}|\cdot\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \Phi = \vec{g}_1\cdot d\vec{S}_1 + ... = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\vec{g}_i\cdot d\vec{S}_i = \iint_S \vec{g}\cdot d\vec{S}$$

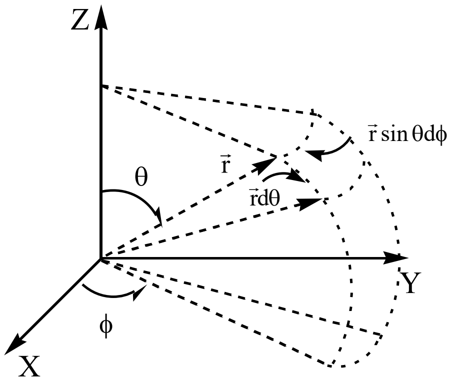
El flujo del campo gravitatorio, a través de una superficie, nos mide la cantidad de líneas del campo gravitatorio que pasan por esa superficie. El flujo total, a través de una superficie Gaussiana esférica de radio R, en cuyo interior hay una masa total M será:

Superficie cerrada: $\Phi = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\vec{g}_i\cdot d\vec{S}_i = \oiint \vec{g}\cdot d\vec{S}$ $\left\{\begin{array}{l} \text{arco}(s):\quad ds = rd\theta; \\ \text{superficie}(S):\quad dS = r^2 d\Omega\,(sr); \\ \text{superficie de esfera}(r=a):\quad S = a^2 4\pi \end{array}\right\}$

$$\Phi_{esfera} = \iint_S \vec{g}\cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{g}\cdot\vec{n}dS = \iint_S -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r\cdot\vec{n}dS = -GM\iint_S \frac{\vec{u}_r\cdot\vec{n}}{r^2}dS$$

$$\Phi_{esfera} = -GM\iint_S \frac{1}{a^2}dS = -GM\iint_S \frac{1}{a^2}a^2 d\Omega = -GM4\pi$$

Demostración infinitesimal:



$$d\Phi = \vec{g}\cdot d\vec{S} = \left(-G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r\right)\cdot\left(rd\theta\cdot r\,\text{sen}\,\theta d\phi\vec{u}_r\right)$$

$$d\Phi = -GM\,\text{sen}\,\theta d\theta d\phi$$

$$\Phi = \iint \vec{g}\cdot d\vec{S} = -GM\int_0^{\pi}\text{sen}\,\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\phi$$

$$\Phi = -GM\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}\left[\phi\right]_0^{2\pi} = -4\pi GM$$

<u>3.8.1 Enunciado del Teorema de Gauss</u>:

«*El flujo del campo gravitatorio,* $\Phi = \oiint \vec{g}\cdot d\vec{S}$*, a través de una superficie cerrada, es igual a menos cuatro pi veces el producto de la constante de gravitación universal por la masa dentro de la superficie* $\Phi = -4\pi GM_{int}$»:

$$\boxed{\Phi = \oiint \vec{g}\cdot d\vec{S} = -4\pi GM_{int}}$$

En el caso de una *superficie cerrada* (superficie gaussiana), el flujo, a través de ella, puede ser cero o negativo: a) Si el flujo es cero quiere decir que entran en la *superficie cerrada*, el mismo número de líneas del campo gravitatorio que salen, es decir, en su interior no hay fuentes del campo que son las masas. b) Si el flujo del campo gravitatorio es negativo quiere decir que salen, de la *superficie cerrada,* menos líneas del campo gravitatorio que entran. Es decir, en su interior hay fuentes del campo que son las masas.

<u>3.8.2 Aplicaciones del teorema de Gauss en el exterior e interior de la Tierra</u>

Cuando hemos calculado el campo y el potencial gravitatorio en un punto determinado, hemos supuesto que las masas son puntuales o de tamaños mucho más pequeños que las distancias al punto. Ahora bien, si los tamaños de las masas no se pueden despreciar frente a las distancias, para calcular el campo gravitatorio y el potencial gravitatorio en un punto del campo, es más sencillo utilizar el teorema de Gauss.

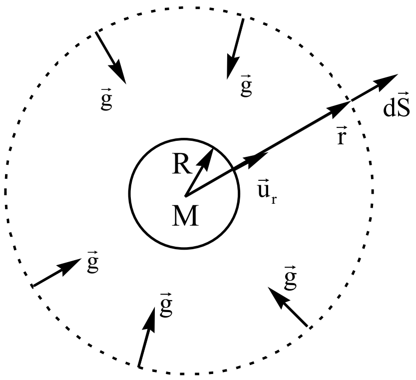
*<u>Ejemplos</u>***:**

1) Halla el campo gravitatorio, de una masa M, en un punto exterior a ella y a una distancia r de su centro de masas.

En primer lugar, consideramos una esfera imaginaria de radio r, tomando la distancia r desde el centro de masas de M hasta el punto exterior. El flujo a través de la esfera imaginaria vendrá dado por el teorema de Gauss

$$\Phi = \vec{g}_{ext} \cdot \vec{S} = \vec{g}_{ext} \cdot 4\pi r^2 \vec{u}_r = -4\pi G M \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{g}_{ext} = -\frac{GM}{r^2}\vec{u}_r}$$

El campo gravitatorio en el exterior de la masa M es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde su centro de masas.



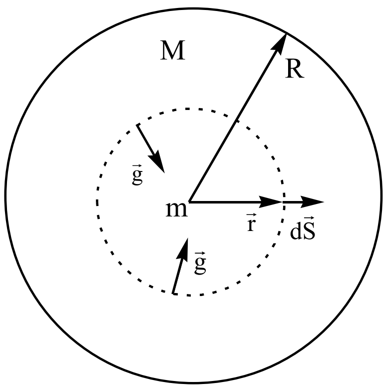
$$\Phi = \vec{g}_{ext} \cdot \vec{S} = \vec{g}_{ext} \cdot 4\pi r^2 \vec{u}_r = -4\pi G M$$

$$\boxed{\vec{g}_{ext} = -\frac{GM}{r^2}\vec{u}_r}$$

2) Halla el campo gravitatorio, de una masa esférica M, de radio R, en un punto de su interior y a una distancia r de su centro de masas.

Consideremos una esfera imaginaria de radio r. Siendo r la distancia desde el centro de masas de M hasta el punto interior, y siendo m la masa que hay dentro de la esfera imaginaria. El flujo a través de la esfera imaginaria vendrá dado por el teorema de Gauss

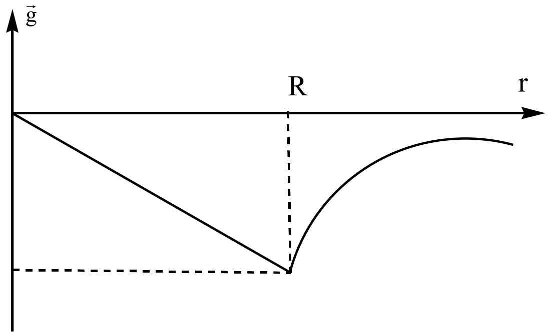
$$\Phi = \vec{g}_{int} \cdot \vec{S} = \vec{g}_{int} \cdot 4\pi r^2 \vec{u}_r = -4\pi G m_{int} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{g}_{int} = -G\frac{m_{int}}{r^2}\vec{u}_r}$$



$$\Phi = \vec{g}_{int} \cdot \vec{S} = \vec{g}_{int} \cdot 4\pi r^2 \vec{u}_r$$

$$\Phi = -4\pi G m_{int}$$

$$\boxed{\vec{g}_{int} = -G\frac{m_{int}}{r^2}\vec{u}_r}$$



Si la esfera es homogénea su densidad permanece constante:

$$\rho_{homogénea} = \frac{M}{V_{esfera}} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{m_{int}}{\frac{4}{3}\pi r^3} \quad \Rightarrow \quad m_{int} = M\frac{r^3}{R^3}$$

$$\boxed{\vec{g}_{int} = -G\frac{m_{int}}{r^2}\vec{u}_r = -G\frac{M}{r^2}\frac{r^3}{R^3}\vec{u}_r = -G\frac{Mr}{R^3}\vec{u}_r}$$

El campo gravitatorio en el interior de la masa M es directamente proporcional a la distancia desde su centro de masas.

3) Considera un cuerpo, de masa m, que está en la superficie de la Tierra y cae, por un agujero, hacia el centro de la Tierra. Determine la velocidad v del cuerpo al llegar al centro de la Tierra, considerando que la densidad de la Tierra es homogénea.

Utilizamos la expresión $W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(g)}$.

La fuerza gravitatoria en el interior de la Tierra es: $\vec{F}_{g(int)} = m\vec{g}_{int} = m\left(-G\frac{M_T r}{R_T^3}\vec{u}_r\right) = -G\frac{M_T m}{R_T^3} r\cdot\vec{u}_r$.

Tenemos en cuenta que la velocidad inicial es cero ($v_0 = 0$) en la superficie de la Tierra:

$$W_{R_T}^0 = \int_{R_T}^0 \vec{F}_{g(int)}\cdot d\vec{r} = \int_{R_T}^0 -G\frac{M_T m}{R_T^3} r\cdot\vec{u}_r\cdot d\vec{r} = -G\frac{M_T m}{R_T^3}\int_{R_T}^0 r\vec{u}_r\cdot d\vec{r} = -G\frac{M_T m}{R_T^3}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{R_T}^0$$

$$W_{R_T}^0 = -G\frac{M_T m}{R_T^3}\left[0-\frac{R_T^2}{2}\right] = +G\frac{M_T m}{R_T^3}\frac{R_T^2}{2} = \frac{1}{2}G\frac{M_T m}{R_T}$$

$$W_{R_T}^0 = \Delta E_c = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 - 0 = \frac{1}{2}G\frac{M_T m}{R_T}$$

$$v^2 = G\frac{M_T}{R_T} 6,67\cdot 10^{-11}\,\tfrac{N\cdot m^2}{kg^2}\frac{5,98\cdot 10^{24}\,kg}{6,37\cdot 10^6\,m} = 6,26\cdot 10^7\,\tfrac{m^2}{s^2} \quad\Rightarrow\quad v = 7.913\,\tfrac{m}{s} = 28.487\,\tfrac{km}{h}$$

3.9 El campo gravitatorio terrestre y los satélites

El movimiento de los satélites viene regido por el campo gravitatorio terrestre. Para analizarlo, vamos a estudiar el campo gravitatorio terrestre considerando cómo varía éste con la altura, cómo varía la energía potencial gravitatoria y posteriormente analizaremos el movimiento de los satélites artificiales.

3.9.1 Campo gravitatorio terrestre: variación de g con la altura

A mayor altura sobre la superficie terrestre la intensidad del campo gravitatorio terrestre disminuye. Sean M_T y R_T la masa y el radio de la Tierra. Si aplicamos el teorema de Gauss para el cálculo del campo gravitatorio a una distancia $r > R_T$ del centro de masas de la Tierra y exterior a ella, es decir, $r = R_T + h$, siendo h la distancia desde la superficie terrestre o altura:

$$\Phi = \vec{g}\cdot\vec{S} = \vec{g}\cdot 4\pi r^2\vec{u}_r = -4\pi G M_T \quad\Rightarrow\quad \vec{g} = -G\frac{M_T}{r^2}\vec{u}_r = -G\frac{M_T}{\left(R_T+h\right)^2}\vec{u}_r$$

El campo gravitatorio terrestre en la superficie de la Tierra se comprueba que vale 9,80 m/s^2, que es algo inferior porque la Tierra está rotando a una velocidad angular de $7,27\cdot 10^{-5}$ rad/s. Por lo que el peso aparente de un objeto en la superficie de la Tierra es algo menor que si esta estuviera en reposo:

$$P_{reposo} - F_n = ma = ma_c = m\omega^2 r = m\omega^2 R_T\cos\lambda \quad \left\{g_{(reposo)} = G\frac{M_T}{R_T^2} = 9,83\,\tfrac{m}{s^2}\right\}$$

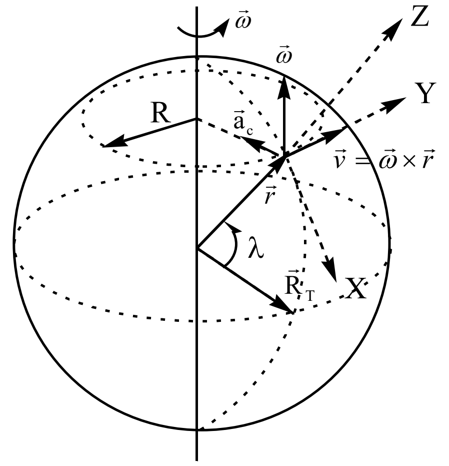
$$F_n = P_{aparente} = mg_{0(rotando)} = P_{reposo} - ma_c = mg_{(reposo)} - ma_c$$

$$g_{0(rotando)} = g_{(reposo)} - a_c = 9,80\,\tfrac{m}{s^2} \quad \begin{cases} a_c = \omega^2 R_T\cos\varphi \\ a_c = \left(7,27\cdot 10^{-5}\,\tfrac{rad}{s}\right)^2\times 6,37\cdot 10^6\,m\times\cos 35^\circ = 0,028\,\tfrac{m}{s^2}\end{cases}$$

Cualquier objeto en reposo en la superficie de la Tierra posee energía cinética:

$$v = \omega R_T \cos\lambda = \tfrac{2\pi}{T} R_T \cos\lambda = \tfrac{2\pi}{24\times 3.600} \times 6{,}37\cdot 10^6 \times \cos\lambda = 463{,}24\cdot\cos\lambda \ \tfrac{m}{s}$$

$$\left(E_c\right)_{r=R_T} = \tfrac{1}{2} mv^2 = \tfrac{1}{2} m\left(463{,}24\cdot\cos\lambda\right)^2 = 107.295{,}4\cdot m\cdot\cos^2\lambda$$



$R = r\cdot\cos\lambda = R_T\cdot\cos\lambda$

$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r} \\ v = \omega r \,\mathrm{sen}\left(90^\circ - \lambda\right) = \omega r \cos\lambda = \omega R_T \cos\lambda = \omega R \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{a}_c = \vec{\omega}\times\vec{v} = \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) \\ a_c = \omega^2 r \cos\lambda = \omega^2 R_T \cos\lambda = \omega^2 R \end{cases}$$

$r = R_T = 6{,}37\cdot 10^6$ m

$\omega = 7{,}27\cdot 10^{-5}$ rad/s

$v = 463\cdot\cos\lambda$ m/s

$a_c = 3{,}36\cdot 10^{-2}\cdot\cos\lambda$ m/s^2

3.9.2 Energía potencial gravitatoria terrestre

La energía potencial gravitatoria de una masa, m, en el campo gravitatorio terrestre aumenta con la altura h: $E_{p(g)} = -G\dfrac{M_T m}{r} = -G\dfrac{M_T m}{\left(R_T + h\right)}$.

$$W_{por-campo} = \int_1^2 \vec{F}_g\cdot d\vec{r} = \int_1^2 \left(-G\frac{M_T m}{r^2}\right)\vec{u}_r\cdot d\vec{r} = \left[G\frac{M_T m}{r}\right]_1^2 = G\frac{M_T m}{r_2} - G\frac{M_T m}{r_1} = -\Delta E_{p(g)}$$

3.9.3 Satélites: velocidad orbital

Consideramos que un satélite está girando alrededor de la Tierra describiendo una órbita circular, y sometido a la fuerza gravitatoria. **La fuerza gravitatoria es atractiva y perpendicular al desplazamiento**, por lo que **la fuerza gravitatoria no realiza trabajo sobre el satélite y éste no varía su energía cinética**, experimenta una aceleración que se invierte en cambiar la dirección de la velocidad.

$$\vec{F}_g \perp d\vec{r} \ \Rightarrow\ W_{por-campo} = \int_1^2 \vec{F}_g\cdot d\vec{r} = 0 \ \Rightarrow\ W_{por} = 0 = \Delta E_c = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 \ \Rightarrow\ \begin{cases} \left|\vec{v}\right| = cte \\ \vec{a}_t = 0 \end{cases}$$

$$\vec{F}_g = \vec{F}_c \quad \left\{\begin{aligned} \vec{F}_g &= -G\frac{M_T m}{r^2}\vec{u}_r \\ \vec{F}_c &= m\vec{a}_c = -m\frac{v_{orb}^2}{r}\vec{u}_r \end{aligned}\right\} \quad \left\{\begin{aligned} G\frac{M_T m}{r^2} &= m\frac{v_{orb}^2}{r} \\ v_{orb}^2 &= G\frac{M_T}{r} = G\frac{M_T}{\left(R_T + h\right)} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{v_{orbital} = \sqrt{G\frac{M_T}{r}} = \sqrt{G\frac{M_T}{\left(R_T + h\right)}}}$$

Existe una relación entre la velocidad orbital, el radio de la órbita (R_T + h) y el período del satélite, así un satélite para orbitar a una distancia de la Tierra (h) tiene que tener una velocidad orbital única y un periodo fijo:

$$\left\{\begin{aligned} v_{orbital}^2 &= G\frac{M_T}{r} \\ v_{orbital} &= \omega\cdot r = \frac{2\pi}{T}\cdot r \end{aligned}\right\}\quad \left\{\begin{aligned} v_{orb}^2 &= G\frac{M_T}{r} = \frac{4\pi^2}{T^2}\cdot r^2 \\ T^2 &= \frac{4\pi^2 r^3}{GM_T} \end{aligned}\right.$$

<u>Tabla de un satélite orbitando alrededor de la Tierra a una altura h, con velocidad v, con aceleración centrípeta, con el período T en segundos y en horas</u>:

Altura (h) m	Velocidad (v) m/s	Acel. Centríp. (m/s2)	Período (T) s	Período (T) h
500.000	7.620	8,45	5.665	1,57
1.500.000	7.119	6,44	6.946	1,93
3.000.000	6.524	4,54	9.024	2,51
4.500.000	6.058	3,38	11.275	3,13
6.000.000	5.678	2,61	13.687	3,80
7.500.000	5.363	2,07	16.251	4,51
9.000.000	5.094	1,69	18.957	5,27
10.500.000	4.862	1,40	21.799	6,06
12.000.000	4.660	1,18	24.770	6,88
13.500.000	4.480	1,01	27.865	7,74
15.000.000	4.320	0,87	31.079	8,63
16.500.000	4.176	0,76	34.408	9,56
18.000.000	4.046	0,67	37.849	10,51
19.500.000	3.927	0,60	41.396	11,50
21.000.000	3.817	0,53	45.048	12,51
22.500.000	3.717	0,48	48.802	13,56
24.000.000	3.624	0,43	52.654	14,63
25.500.000	3.538	0,39	56.603	15,72
27.000.000	3.457	0,36	60.646	16,85
28.500.000	3.382	0,33	64.780	17,99
30.000.000	3.312	0,30	69.005	19,17
31.500.000	3.245	0,28	73.318	20,37
33.000.000	3.183	0,26	77.717	21,59
34.500.000	3.124	0,24	82.200	22,83
36.000.000	3.068	0,22	86.767	24,10
37.500.000	3.015	0,21	91.415	25,39
39.000.000	2.965	0,19	96.143	26,71
40.500.000	2.917	0,18	100.951	28,04
42.000.000	2.872	0,17	105.835	29,40

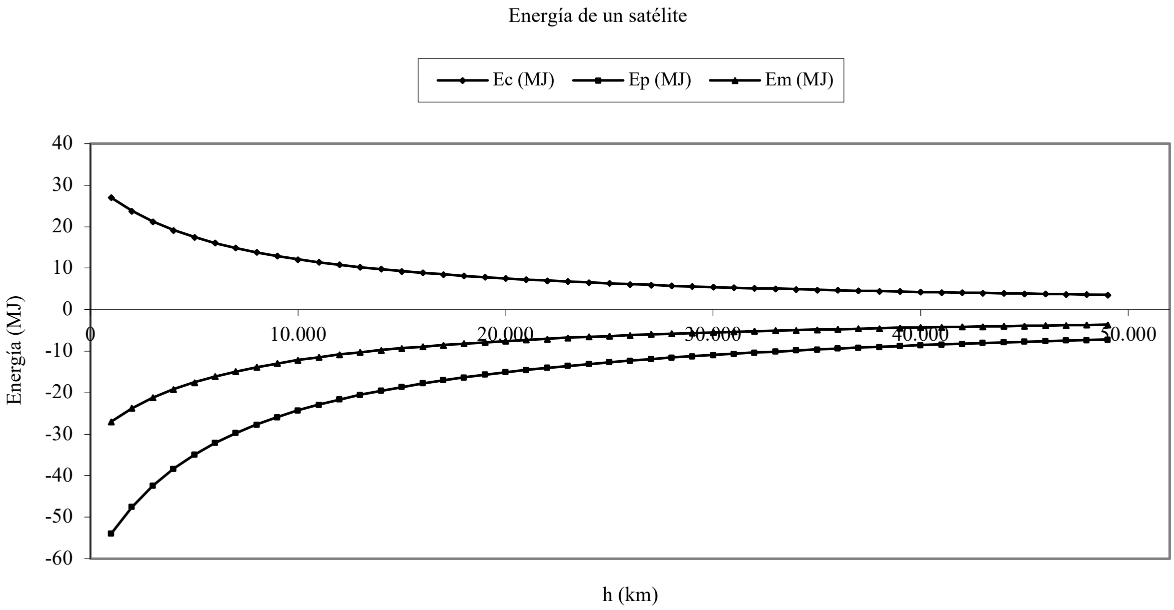
<u>3.9.4 Energía mecánica de un satélite en órbita</u>

Sea un satélite, de masa **m**, girando en una órbita, alrededor de la Tierra, de radio **r** = $R_T + h$, siendo r la distancia al centro de masas de la Tierra, que es la suma del radio de la Tierra y de la altura h sobre su superficie.

La energía mecánica del satélite es la suma de la energía cinética y de la energía potencial gravitatoria, siendo esta suma la mitad de la energía potencial gravitatoria:

$$E_m = E_c + E_{p(g)} \quad \begin{cases} E_c = \dfrac{1}{2} m v_{orb}^2 = \dfrac{1}{2} m G \dfrac{M_T}{r} = \dfrac{1}{2} G \dfrac{M_T m}{r} = -\dfrac{1}{2} E_{p(g)} \\ E_{p(g)} = -G \dfrac{M_T m}{r} = -G \dfrac{M_T m}{(R_T + h)} = -2E_c \end{cases}$$

$$\boxed{E_m = E_c + E_{p(g)} = \frac{1}{2} G \frac{M_T m}{r} - G \frac{M_T m}{r} = -\frac{1}{2} G \frac{M_T m}{r} = -\frac{1}{2} G \frac{M_T m}{(R_T + h)} = \frac{1}{2} E_{p(g)} = -E_c}$$



La energía de un satélite en órbita

1. La energía potencial gravitatoria es siempre negativa. La energía cinética es siempre positiva. El valor de la energía cinética es la mitad que el de la energía potencial gravitatoria.
2. La energía mecánica es siempre negativa.
3. Al pasar el satélite de una órbita a otra más alejada aumenta el radio de la órbita (R_T +h), por lo que aumenta su energía mecánica, aumentando su energía potencial y disminuyendo su energía cinética, siendo la variación de la energía cinética la mitad que la de la potencial.

Ejemplo: Determine la diferencia de energía mecánica, de energía cinética y de energía potencial de un satélite, de masa m = 1 kg, girando en la órbita de radio $r_1 = 2 \cdot R_T$ y girando en la órbita de radio $r_2 = 4 \cdot R_T$.

$$r_1 = 2R_T \begin{cases} E_{c(1)} = \dfrac{1}{2} G \dfrac{M_T m}{(R_T + h)} = \dfrac{1}{2} G \dfrac{M_T m}{2R_T} \\ E_{p(1)} = -G \dfrac{M_T m}{(R_T + h)} = -G \dfrac{M_T m}{2R_T} \end{cases} E_{m(1)} = E_{c(1)} + E_{p(1)} = -\frac{1}{2} G \frac{M_T m}{(R_T + h)} = -\frac{1}{2} G \frac{M_T m}{2R_T} = -\frac{1}{4} G \frac{M_T m}{R_T}$$

$$r_2 = 4R_T \begin{cases} E_{c(2)} = \dfrac{1}{2} G \dfrac{M_T m}{(R_T + h)} = \dfrac{1}{2} G \dfrac{M_T m}{4R_T} \\ E_{p(2)} = -G \dfrac{M_T m}{(R_T + h)} = -G \dfrac{M_T m}{4R_T} \end{cases} E_{m(2)} = E_{c(2)} + E_{p(2)} = -\frac{1}{2} G \frac{M_T m}{(R_T + h)} = -\frac{1}{2} G \frac{M_T m}{4R_T} = -\frac{1}{8} G \frac{M_T m}{R_T}$$

$$\Delta E_m = E_{m(2)} - E_{m(1)} = -\frac{1}{8}G\frac{M_T m}{R_T} + \frac{1}{4}G\frac{M_T m}{R_T} = \frac{1}{8}G\frac{M_T m}{R_T} = 7{,}827\cdot 10^6\ \text{J} \quad \left\{E_{m(2)} > E_{m(1)}\right\}$$

$$\Delta E_c = E_{c(2)} - E_{c(1)} = \frac{1}{2}G\frac{M_T m}{4R_T} - \frac{1}{2}G\frac{M_T m}{2R_T} = -7{,}827\cdot 10^6\ \text{J} \quad \left\{E_{c(2)} < E_{c(1)}\right\}$$

$$\Delta E_p = E_{p(2)} - E_{p(1)} = -G\frac{M_T m}{4R_T} + G\frac{M_T m}{2R_T} = \frac{1}{4}G\frac{M_T m}{R_T} = 1{,}5654\cdot 10^7\ \text{J} \quad \left\{E_{p(2)} < E_{p(1)}\right\}$$

Newton, haciendo los cálculos necesarios, demostró:

1. Si la energía mecánica total del satélite en órbita fuese cero, la órbita no sería una elipse (órbita cerrada) sino una parábola. Por tanto, el satélite se escaparía del campo gravitatorio terrestre. Esto ocurre cuando la energía cinética, en valor absoluto, es igual que la energía potencial gravitatoria.

2. Si la energía mecánica total del satélite en órbita fuese mayor que cero, la órbita sería una hipérbola. Es decir, si la energía cinética del satélite en órbita fuese mayor, en valor absoluto, que la energía potencial gravitatoria la energía del satélite sería positiva y se escaparía del campo gravitatorio.

3.9.5 Satélites: velocidad de escape

Para que un satélite se escape **de la superficie de la Tierra** hemos de conseguir llevarlo a una distancia en la que, al menos, su energía mecánica total sea cero, es decir, que al final se pare y no tenga energía cinética y que tampoco tenga energía potencial. Por lo que si aplicamos el principio de conservación de la energía su energía mecánica en la superficie de la Tierra debe ser también cero. Por tanto, la **velocidad de escape de la superficie de la Tierra** se calcula de la siguiente forma:

$$\left.\begin{cases} E_{m(r=R_T)} = E_{m(r\to\infty)} = 0 \\ E_{m(r=R_T)} = \frac{1}{2}mv^2_{escape} - G\frac{M_T m}{R_T} = 0 \end{cases}\right\} v^2_{esc} = 2G\frac{M_T}{R_T} \Rightarrow \boxed{v_{escape} = \sqrt{2G\frac{M_T}{R_T}} = 11.191\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} = 40.286{,}6\,\tfrac{\text{km}}{\text{h}}}$$

El hecho es que el satélite para escapar debe alcanzar una energía cinética que iguale a su energía potencial gravitatoria y la energía mecánica se haga cero.

La velocidad de escape es independiente de la masa del satélite, aunque el empuje requerido para acelerarlo, que será el producto de la masa por la aceleración necesaria para alcanzar dicha velocidad, y obtener esa velocidad sí depende de la masa. En la práctica, se necesita una velocidad menor, debido a que la Tierra está girando y, si lanzamos el satélite en el sentido de giro de la Tierra, es decir, en sentido Oeste-Este ya lleva una velocidad relativa, y la de escape sería menor. Y, si el lanzamiento se hace cerca del Ecuador mayor será esa velocidad relativa.

Otra forma: la energía que hay que darle al satélite para que aumente su energía cinética hasta que numéricamente sea igual a su energía potencial gravitatoria, y permitirle que escape.

$$\left\{\begin{aligned}&W_{motor}=\Delta E'_c=\frac{1}{2}mv_{esc}^2-\frac{1}{2}mv_{Tierra}^2\\&W_{motor}=\Delta E_m=0-\left(\frac{1}{2}mv_{Tierra}^2-G\frac{M_Tm}{R_T}\right)_{r=R_T}\end{aligned}\right\}\left\{\begin{aligned}&W_{motor}=\frac{1}{2}mv_{esc}^2-\frac{1}{2}mv_{Tierra}^2=-\frac{1}{2}mv_{Tierra}^2+G\frac{M_Tm}{R_T}\\&\frac{1}{2}mv_{esc}^2=G\frac{M_Tm}{R_T}\Rightarrow\ \boxed{v_{esc}^2=2G\frac{M_T}{R_T}}\end{aligned}\right.$$

$$W_{neto}=\Delta E_c=-\Delta E_{p(g)}+W_{motor}$$

$$W_{motor}=\Delta E_c+\Delta E_{p(g)}=\left(E_c+E_{p(g)}\right)_{r=\infty}-\left(E_c+E_{p(g)}\right)_{r=R_T}=E_{m(r=\infty)}-E_{m(r=R_T)}$$

$$W_{motor}=(0)_{r=\infty}-\left(\frac{1}{2}mv_{Tierra}^2-G\frac{M_Tm}{R_T}\right)_{r=R_T}=-\frac{1}{2}m\left(\omega R_T\cos\lambda\right)^2+G\frac{M_Tm}{R_T}$$

$$W_{motor}=-107.295{,}4\cdot m\cdot\cos^2\lambda+62.616.326{,}5\cdot m\approx 62.509.031{,}1\cdot m\approx E_{p(g)(r=R_T)}$$

Si el satélite se encuentra girando en una órbita, **a una altura h sobre la superficie de la Tierra,** entonces la **velocidad de escape de dicha órbita** y la energía adicional para que escape de la acción del campo gravitatorio terrestre sería:

$$\left\{\begin{aligned}&E_{m(r)}=E_{m(r\to\infty)}=0\\&E_{m(r)}=\frac{1}{2}mv_{escape}^2-G\frac{M_Tm}{r}=0\end{aligned}\right\}\quad v_{esc}^2=2G\frac{M_T}{r}\quad\Rightarrow\quad\boxed{v_{escape}=\sqrt{2G\frac{M_T}{r}}=\sqrt{2G\frac{M_T}{\left(R_T+h\right)}}}$$

$$\left\{\begin{aligned}&W_{motor}=\Delta E'_c=\frac{1}{2}mv_{esc}^2-\frac{1}{2}mv_{órbita}^2\\&W_{motor}=\Delta E_m=0-\left(\frac{1}{2}mv_{órbita}^2-G\frac{M_Tm}{r}\right)_r\end{aligned}\right\}\left\{\begin{aligned}&W_{motor}=\frac{1}{2}mv_{esc}^2-\frac{1}{2}mv_{órbita}^2=-\frac{1}{2}mv_{órbita}^2+G\frac{M_Tm}{r}\\&\frac{1}{2}mv_{esc}^2=G\frac{M_Tm}{r}\Rightarrow\ \boxed{v_{esc}^2=2G\frac{M_T}{r}}\end{aligned}\right.$$

3.9.6 El trabajo realizado sobre un satélite para colocarlo en órbita

Para colocar un satélite, en una órbita determinada, el trabajo que tienen que realizar los motores sobre el satélite, en contra de las fuerzas del campo gravitatorio, se invierte en incrementar su energía mecánica total:

$$W_{neto}=\Delta E_c=\int_1^2\vec{F}_{neta}\cdot d\vec{r}=\int_1^2\left(\vec{F}_g+\vec{F}_{motor}\right)\cdot d\vec{r}=\int_1^2\vec{F}_g\cdot d\vec{r}+\int_1^2\vec{F}_{motor}\cdot d\vec{r}=-\Delta E_{p(g)}+W_{motor}$$

$$\boxed{W_{motor}=\Delta E_c+\Delta E_{p(g)}=\left(E_c+E_{p(g)}\right)_2-\left(E_c+E_{p(g)}\right)_1=E_{m(2)}-E_{m(1)}=\Delta E_m}$$

3.9.6.1 El trabajo motor sobre un satélite en la superficie de la Tierra para situarlo en una órbita de radio r = R_T + h

$$W_{motor}=\Delta E_m=E_{m(2)}-E_{m(1)}=\left(E_c+E_{p(g)}\right)_r-\left(E_c+E_{p(g)}\right)_{r=R_T}=\left(\tfrac{1}{2}E_{p(g)}\right)_r-\left(E_c+E_{p(g)}\right)_{r=R_T}$$

El valor de la energía cinética de un objeto en la superficie de la Tierra es 0,0017 veces el valor su la energía potencial:

$$\left\{\begin{aligned}&\left(E_c\right)_{r=R_T}=\tfrac{1}{2}mv^2=\tfrac{1}{2}m\left(\omega R_T\cos\lambda\right)^2=107.295{,}4\cdot m\cdot\cos^2\lambda\\&\left(E_{p(g)}\right)_{r=R_T}=-G\frac{M_Tm}{R_T}=-62.616.326{,}5\cdot m\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{\left|\left(E_c\right)_{r=R_T}\right|}{\left|\left(E_{p(g)}\right)_{r=R_T}\right|}=\frac{107.295{,}4\cdot m}{62.616.326{,}5\cdot m}=0{,}0017$$

$$\boxed{E_{m(r=R_T)}=\left(E_c+E_{p(g)}\right)_{r=R_T}\approx\left(E_{p(g)}\right)_{r=R_T}=-G\frac{M_Tm}{R_T}}$$

$$W_{motor}=\left(\frac{1}{2}mv_{orb}^2-G\frac{M_Tm}{r}\right)_r-\left(0-G\frac{M_Tm}{R_T}\right)_{r=R_T}=\left(\frac{1}{2}mG\frac{M_T}{r}-G\frac{M_Tm}{r}\right)-\left(0-G\frac{M_Tm}{R_T}\right)$$

$$W_{motor}=-\frac{1}{2}G\frac{M_Tm}{r}+G\frac{M_Tm}{R_T}=GM_Tm\left(\frac{1}{R_T}-\frac{1}{2\left(R_T+h\right)}\right)=GM_Tm\frac{R_T+2h}{2R_T\left(R_T+h\right)}$$

3.9.6.2 El trabajo motor sobre un satélite orbitando para situarlo en otra órbita superior

$$W_{motor}=\Delta E_c+\Delta E_{p(g)}=E_{m(f)}-E_{m(i)}=\left(E_c+E_{p(g)}\right)_f-\left(E_c+E_{p(g)}\right)_i=\left(\tfrac{1}{2}E_{p(g)}\right)_f-\left(\tfrac{1}{2}E_{p(g)}\right)_i$$

$$W_{motor}=\left(\tfrac{1}{2}mv_{orb(f)}^2-G\frac{M_Tm}{r_f}\right)-\left(\tfrac{1}{2}mv_{orb(i)}^2-G\frac{M_Tm}{r_i}\right)=\left(-\frac{1}{2}G\frac{M_Tm}{r_f}\right)-\left(-\frac{1}{2}G\frac{M_Tm}{r_i}\right)$$

$$W_{motor}=-\frac{1}{2}G\frac{M_Tm}{r_f}+\frac{1}{2}G\frac{M_Tm}{r_i}=\frac{1}{2}GM_Tm\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{r_f}\right)=\frac{1}{2}GM_Tm\left(\frac{r_f-r_i}{r_ir_f}\right)$$

3.9.6.3 El trabajo motor sobre un satélite en la superficie de la Tierra para sacarlo de la interacción gravitatoria terrestre:

En la superficie de la Tierra consideramos la velocidad inicial cero y hay que alcanzar la velocidad de escape

$$W_{motor}=\Delta E_c+\Delta E_{p(g)}=E_{m(r=\infty)}-E_{m(r=R_T)}=\left(E_c+E_{p(g)}\right)_{r=\infty}-\left(E_c+E_{p(g)}\right)_{r=R_T}$$

$$W_{motor}=\left(0\right)_{r=\infty}-\left(0-G\frac{M_Tm}{R_T}\right)_{r=R_T}=G\frac{M_Tm}{R_T}$$

El trabajo motor se invierte en aumentar la velocidad del satélite para poder escapar de la interacción gravitatoria:

$$\left.\begin{cases}W_{motor}=\Delta E_{c(esc)}=\tfrac{1}{2}mv_{esc}^2-\tfrac{1}{2}mv_{r=R_T}^2=\tfrac{1}{2}mv_{esc}^2-0\\ W_{motor}=G\dfrac{M_Tm}{R_T}\end{cases}\right\}W_{motor}=\tfrac{1}{2}mv_{esc}^2=G\frac{M_Tm}{R_T}\Rightarrow\boxed{v_{esc}^2=2G\frac{M_T}{R_T}}$$

3.9.6.4 El trabajo motor sobre un satélite orbitando para sacarlo de la interacción gravitatoria terrestre

En una órbita, a una altura h sobre la superficie de la Tierra, la velocidad inicial es la velocidad orbital y para salir hay que alcanzar la velocidad de escape

$$W_{motor}=\Delta E_c+\Delta E_{p(g)}=E_{m(r=\infty)}-E_{m(r)}=\left(E_c+E_{p(g)}\right)_{r=\infty}-\left(E_c+E_{p(g)}\right)_r$$

$$W_{motor}=\left(0\right)_{r=\infty}-\left(\frac{1}{2}mv_{orb}^2-G\frac{M_Tm}{r}\right)_r=-\left(\frac{1}{2}mG\frac{M_T}{r}-G\frac{M_Tm}{r}\right)_r=\frac{1}{2}G\frac{M_Tm}{r}$$

El trabajo motor se invierte en aumentar la velocidad del satélite para poder escapar de la interacción gravitatoria:

$$\left\{\begin{array}{l} W_{motor} = \Delta E_{c(esc)} = \frac{1}{2}mv_{esc}^2 - \frac{1}{2}mv_{orb}^2 \\ W_{motor} = \frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r} \end{array}\right\} \quad W_{motor} = \frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r} = \frac{1}{2}mv_{esc}^2 - \frac{1}{2}mv_{orb}^2$$

$$\frac{1}{2}mv_{esc}^2 = W_{motor} + \frac{1}{2}mv_{orb}^2 = \frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r} + \frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r} = G\frac{M_T m}{r} \Rightarrow \boxed{v_{esc}^2 = 2G\frac{M_T}{r}}$$

3.10 Problemas de «Interacción Gravitatoria»

$G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N·m²/kg²; $R_T = 6{,}37\cdot10^6$ m; $M_T = 5{,}98\cdot10^{24}$ kg; $g_{0(reposo)} = 9{,}83$ m/s² $= G\cdot M_T/(R_T)^2$.

1) Calcula: a) la altura sobre la superficie terrestre a la que el valor de g se ha reducido a la mitad; b) el potencial gravitatorio terrestre en un punto situado a 6.370 km de distancia de la Tierra. [a) 2.638 km; b) U = $-3{,}12\cdot10^7$ J/kg]

2) Una masa puntual de 8 kg está situada en el punto (0; 0). Calcular: a) punto del eje OY en el que habría que colocar otra masa puntual de 6 kg para que una partícula libre, de 2 kg, se encuentre en reposo en el punto (0;2) m; b) energía potencial gravitatoria de la partícula libre. [a) $(0;2+(3)^{½})$ m ; b) $-9{,}96\cdot10^{-10}$ J]

3) Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba desde la superficie terrestre con una velocidad de 1.000 m/s. a) Calcular la altura máxima que alcanzará; b) repetir el cálculo despreciando la variación de g con la altura y comparar el resultado con el del apartado anterior. [a) 51.274,7 m ; b) 51.020,4 m]

4) Determine: a) la velocidad de escape de un cohete desde la superficie de la Tierra; b) la velocidad con la que debemos lanzar un proyectil desde la superficie de la Tierra, si queremos que a 400 km tenga una velocidad de 500 m/s. [a) 40.286 km/h = 11.191 m/s; b) 11.016,5 km/h = 3.060 m/s]

5) Calcula: a) el trabajo que hay que realizar para trasladar un cuerpo de 20 kg desde la superficie terrestre hasta una altura igual al radio de la Tierra; b) velocidad con que habría que lanzarlo para que alcanzara dicha altura. [a) $6{,}26\cdot10^8$ J; b) 28.487 km/h = 7.913 m/s]

6) Un satélite artificial describe una órbita circular a una altura igual a tres radios terrestres sobre la superficie de la Tierra. Calcula: a) la velocidad orbital del satélite; b) la aceleración del mismo. [a) 3.956,5 m/s = 14.243,5 km/h; b) 0,61 m/s²]

7) Un satélite se encuentra girando en la órbita geoestacionaria ($T_{sideral}$ = 23:56:04 h = 86.164 s). Calcule el radio de la órbita y la velocidad del satélite. [r = 42.173,5 km; v_{orb} = 11.071 km/h]

8) Calcula la velocidad de escape para un cuerpo situado: a) en la superficie terrestre; b) a una altura de 2.000 km sobre dicha superficie. [a) 40.286 km/h; b) 35.145 km/h]

9) Un objeto que pesa 686 N, en la superficie de la Tierra, se encuentra en la superficie de un planeta cuyo radio es el doble del terrestre y cuya masa es 8 veces la de la Tierra. Calcule: a) el peso del objeto en dicho lugar; b) el tiempo de caída desde una altura de 20 m sobre la superficie del planeta. [a) 1.372 N; b) 1,430 s]

10) Determina el valor de la intensidad del campo gravitatorio en el punto medio del interior de la Tierra. Posteriormente, determina la velocidad con la que llegaría un objeto, de 10 kg, al centro de la Tierra; si cae por un agujero desde la superficie. [g_{int} = -4,9 m/s²; 7.901 m/s].

11) Se desea situar un satélite artificial, de 50 kg de masa, en una órbita circular situada en el plano del ecuador y con un radio igual al doble del radio terrestre. Calcule: a) la energía que hay que comunicar al satélite; b) la velocidad orbital del mismo; c) la energía adicional que habría que aportar al satélite en órbita para que escape de la acción del campo gravitatorio terrestre; d) la velocidad de escape desde la órbita. [a) $2{,}35\cdot10^9$ J; b) 5.595 m/s = 20.143 km/h; b) $7{,}827\cdot10^8$ J; d) 7.913 m/s]

12) Se desea situar un satélite artificial, de 100 kg de masa, en una órbita circular situada en el plano del ecuador y con un radio igual a $2{,}5\cdot R_T$. Calcule: a) la energía que hay que comunicar al satélite b) la velocidad orbital del mismo; c) la energía adicional que habría que aportar al satélite en órbita para que escape de la acción del campo gravitatorio terrestre; d) la velocidad de escape desde la órbita. [a) $5{,}00\cdot10^9$ J; b) 5.004,65 m/s; c) $1{,}196\cdot10^9$ J; d) 7.077,65 m/s]

13) Un meteorito de 1.000 kg colisiona con otro, a una altura sobre la superficie terrestre de 6 veces el radio de la Tierra, y pierde toda su energía cinética. a) ¿Cuánto pesa el meteorito en ese punto y cuál es su energía mecánica tras la colisión?. b) Si cae a la Tierra, haga un análisis energético del proceso de caída. Calcule la energía cinética, la energía potencial gravitatoria y la velocidad con la que llega a la superficie de la Tierra. ¿Dependerá esa velocidad de la trayectoria seguida. Razone las respuestas. [a) P = 200 N; $E_m = -8{,}945\cdot10^9$ J; b) $E_p = -6.26\cdot10^{10}$ J; $E_c = 5{,}367\cdot10^{10}$ J; v = 10.360 m/s]

14) A una altura de 500 km giran dos satélites de masa 1.000 kg, cada uno, describiendo la misma órbita circular, pero en sentido contrario, con lo que chocarán. Si la colisión es totalmente inelástica calcula: a) la energía mecánica inmediatamente después de la colisión; b) la velocidad con la que llegan al suelo si despreciamos el rozamiento con la atmósfera terrestre. Datos: $g_0 = 9{,}8$ m·s^{-2}; $R_T = 6{,}37\cdot10^6$ m. [a) $-1{,}16\cdot10^{11}$J; b) 3.022 m/s]

15) Un satélite, de 1.000 kg, está girando alrededor de la Tierra en una órbita circular a una altura de 350 km. a) ¿Cuál es la energía mecánica del satélite?. b) ¿Cuál es la energía que se ha gastado para colocarlo en dicha órbita?. Datos: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; $g_0 = 9{,}8$ ms^{-2}; $R_T = 6.370$ km. [a) $-2{,}96\cdot10^{10}$ J; b) $3{,}28\cdot10^{10}$ J]

16) Un cuerpo, inicialmente en reposo a una altura de 150 km sobre la superficie terrestre, se deja caer libremente. a) Explique cualitativamente cómo varían las energías cinética, potencial y mecánica del cuerpo durante el descenso, si se supone nula la resistencia del aire, y determine la velocidad del cuerpo cuando llega a la superficie terrestre. b) Si, en lugar de dejar caer el cuerpo, lo lanzamos verticalmente hacia arriba desde la posición inicial, ¿cuál sería su velocidad de escape?. Datos: G, R_T y M_T. [a) 1.694 m/s; b) 11.044 m/s]

17) Dos satélites idénticos A y B describen órbitas circulares de diferente radio ($R_A > R_B$) alrededor de la Tierra. Conteste razonadamente a las siguientes preguntas: a) ¿cuál de los dos tiene mayor energía cinética?; b) si los dos satélites estuviesen en la misma órbita ($R_A = R_B$) y tuviesen distinta masa ($m_A < m_B$), ¿cuál de los dos se movería con mayor velocidad?, ¿cuál de ellos tendría más energía cinética?. [a) El B; b) con la misma velocidad; el B tiene la energía cinética mayor.]

18) a) Explique la influencia que tienen la masa y el radio de un planeta en la aceleración de la gravedad en su superficie y en la energía potencial de una partícula próxima a dicha superficie. b) Imagine que la Tierra aumentara su radio al doble y su masa al cuádruple, ¿cuál sería el nuevo valor de g?, y ¿el nuevo período de la Luna?. Datos: G, R_T, M_T, la distancia Tierra-Luna es $3{,}8\cdot10^5$ km. [a) $g = GM/R^2$; $E_p = mgh = m(GM/R^2)h$; b) el valor de g sería el mismo y el período de la Luna sería la mitad.]

19) Analice las siguientes proposiciones, razonando si son verdaderas o falsas: a) el trabajo realizado por una fuerza sobre un cuerpo es igual a la variación de su energía cinética; b) la energía cinética necesaria para escapar de la Tierra depende de la elección del origen de energía potencial.

20) Razone las respuestas a las siguientes preguntas: a) si el cero de energía potencial gravitatoria de una partícula de masa m se sitúa en la superficie de la Tierra, ¿cuál es el valor de la energía de la partícula cuando se encuentra a una distancia infinita de la Tierra?; b) ¿puede ser negativo el trabajo realizado por una fuerza gravitatoria?; ¿puede ser negativa la energía potencial gravitatoria?. [a) GMm/R_T; b) el trabajo es negativo si el desplazamiento es de sentido contrario a la fuerza, la energía potencial gravitatoria es siempre negativa ya que es cero en el infinito.]

21) Un satélite artificial de 1.000 kg gira alrededor de la Tierra en una órbita circular de 7.650 km de radio, a 1.280 km de altura. Calcule: a) los cambios que ha experimentado el satélite, desde su lanzamiento de un punto del ecuador de la Tierra, en la energía cinética, la energía potencial y la energía mecánica; b) el trabajo que se ha tenido que realizar para colocarlo en esa órbita; c) la aceleración de la gravedad en esa órbita así como el peso del satélite. Datos: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ $N\cdot m^2/kg^2$; $R_T = 6{,}37\cdot10^6$ m; $M_T = 5{,}98\cdot10^{24}$ kg. [a) $\Delta E_c = 2{,}60\cdot10^{10}$ J; $\Delta E_{p(g)} = 1{,}048\cdot10^{10}$ J; $\Delta E_m = 3{,}643\cdot10^{10}$ J; b) $W = 3{,}643\cdot10^{10}$ J; c) $g = 6{,}81$ m/s^2; 0]

22) Un satélite artificial en órbita geoestacionaria es aquél que, al girar con la misma velocidad angular de rotación que la Tierra, se mantiene sobre la misma vertical. a) Explique las características de esa órbita y calcule su altura respecto a la superficie de la Tierra; b) Razone qué valores obtendrá para la masa y el peso de un cuerpo situado en dicho satélite sabiendo que su masa en la Tierra es de 20 kg. Datos: G, R_T; M_T.[a) Órbita alrededor de la Tierra en el plano ecuatorial para tener el mismo eje de rotación que la Tierra y a una altura de 35.837,6 km; b) la masa es la misma, 20 kg, pero el peso es cero.]

23) La aceleración de caída libre en un punto de la superficie de la Tierra depende de la latitud y del período de rotación de la Tierra. Demuestre: a) si la aceleración de caída libre sobre el ecuador sería mayor, menor o igual si el período de rotación de la Tierra disminuyese a 16 horas; b) lo mismo pero sobre el polo norte. [a) Ecuador: $g_{rotando(T=24h)} = 9{,}780$ m/s^2 > $g_{rotando(T=16h)} = 9{,}738$ m/s^2; b) polo norte: $g_{rotando(T=24h)} = g_{rotando(T=16h)}$]

24) Considere un satélite de 100 kg situado sobre un punto del ecuador en la superficie de la Tierra. Calcule: a) la velocidad del satélite en la superficie de la Tierra; b) la energía mecánica del satélite en el punto del ecuador sobre la superficie de la Tierra; c) la energía mecánica que tendrá el satélite cuando gire en una órbita a 400 km sobre la superficie de la Tierra; d) el trabajo que hay que realizar para trasladar el satélite desde la superficie de la Tierra hasta la órbita en la que está girando a 400 km sobre la superficie de la Tierra. Datos: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ $N\cdot m^2/kg^2$; $R_T = 6{,}37\cdot10^6$ m; $M_T = 5{,}98\cdot10^{24}$ kg. [a) 463 m/s; b) $-6{,}25\cdot10^9$ J ; c) $-2{,}95\cdot10^9$ J; d) $3{,}3\cdot10^9$ J]

25) Considere un satélite artificial, de masa 50 kg, en órbita geoestacionaria. Determine: a) el radio de la órbita y la velocidad del satélite; b) el cambio en la energía del satélite al pasar de la órbita geoestacionaria a la órbita de la estación orbital terrestre, a 400 km sobre la superficie de la Tierra. Datos: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ $N\cdot m^2/kg^2$; $R_T = 6{,}37\cdot10^6$ m; $M_T = 5{,}98\cdot10^{24}$ kg. [a) 42.250 km; b) $-1{,}234\cdot10^9$ J]

26) Suponga que la masa terrestre se duplicara. a) Calcule razonadamente el nuevo período orbital de la Luna suponiendo que su radio orbital permaneciera constante. b) Si, además de duplicarse la masa terrestre, se duplicara su radio, ¿cuál sería el valor de g en la superficie terrestre?. Datos: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ $N\cdot m^2/kg^2$; $R_T = 6{,}37\cdot10^6$ m; $M_T = 5{,}98\cdot10^{24}$ kg; $R_{orbita\text{-}Luna} = 3{,}84\cdot10^8$ m. [a) $T/2^{½}$; b) $g_0/2$]

27) Sean las cuatro masas: $m_1 = 1$ kg en el punto (0;0), $m_2 = 2$ kg en el punto (0;1) m, $m_3 = 3$ kg en el punto (1;1) m y $m_4 = 4$ kg en el punto (1;0) m. Calcule: a) la fuerza, módulo y dirección, ejercida sobre la masa m_1 por las otras tres masas; b) la intensidad del campo gravitatorio ejercida sobre la masa m_1 por las otras tres masas; c) la energía potencial del sistema formado por las cuatro masas; d) el trabajo que hay que realizar sobre el sistema, contra la fuerza gravitatoria, para separar las cuatro masas hasta el infinito. Dato: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ $N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$. [a) $F_{1(total)} = 3{,}9448\cdot10^{-10}$ N a 31,165º; b) $3{,}945\cdot10^{-10}$ m/s^2 a 31,165º; c) $-2{,}11\cdot10^{-9}$ J; c) $2{,}11\cdot10^{-9}$ J]

28) a) Un satélite artificial describe una órbita circular en torno a la Tierra. ¿Qué trabajo realiza la fuerza con la que la Tierra atrae al satélite, durante una órbita?. Justifique la respuesta.

29) La masa del planeta Júpiter es, aproximadamente, 300 veces la de la Tierra, su diámetro 10 veces mayor que el terrestre y su distancia media al Sol 5 veces mayor que la de la Tierra al Sol. a) Razone cuál sería el peso en Júpiter de un astronauta de 75 kg. b) Calcule el tiempo que Júpiter tarda en dar una vuelta completa alrededor del Sol, expresado en años terrestres. Datos: $g = 9{,}8$ m/s^2; radio orbital terrestre alrededor del Sol es de $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m. [a) 2.203 N; b) $11{,}18 \cdot T_{Tierra}$]

30) a) Analice las características de la interacción gravitatoria entre dos masas puntuales. b) ¿Cómo se ve afectada la interacción gravitatoria descrita en el apartado anterior si en las proximidades de las dos masas se coloca una tercera masa, también puntual?. Haga un esquema de las fuerzas gravitatorias que actúan sobre la tercera masa.

31) Sean las cuatro masas: $m_1 = 1$ kg en el punto (0;0), $m_2 = 2$ kg en el punto (1;0) m, $m_3 = 3$ kg en el punto (0;1) m y $m_4 = 4$ kg en el punto (-1;0) m. Calcule: a) la fuerza ejercida sobre la masa m_1 por las otras tres masas; b) la energía potencial del sistema formado por las cuatro masas; c) el trabajo que hay que realizar sobre el sistema, contra la fuerza gravitatoria, para separar las cuatro masas hasta el infinito. Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2}. [a) $2{,}40 \cdot 10^{-10}$ N a 123,7º; b) $-1{,}7 \cdot 10^{-9}$ J]

32) La velocidad de escape de un satélite, lanzado desde la superficie de la Luna, es de 2.370 m/s. a) Explique el significado de la velocidad de escape y calcule el radio de la Luna. b) Determine la intensidad del campo gravitatorio lunar en un punto de su superficie. Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m^2/kg^2; $M_{Luna} = 7{,}4 \cdot 10^{22}$ kg. [a) $R_L = 1{,}76 \cdot 10^6$ m; b) $g_{Luna} = 1{,}60$ m/s^2]

33) Dos masas puntuales $m_1 = 10$ kg y $m_2 = 5$ kg están situadas en los puntos $P_1(0,3)$ m y $P_2(4,0)$ m, respectivamente. a) Dibuje el campo gravitatorio producido por cada una de las masas en el punto A(0,0) m y en el punto B(4,3) m y calcule el campo gravitatorio total en ambos puntos. b) Determine el trabajo necesario para desplazar una partícula de 0,5 kg desde el punto B hasta el A. Discuta el signo de este trabajo y razone si su valor depende de la trayectoria seguida. $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m^2/kg^2. [a) $g_A = 7{,}7 \cdot 10^{-11}$ m/s^2; $\theta_A = 15{,}7º$; $g_B = 5{,}58 \cdot 10^{-11}$ m/s^2; $\theta_B = 221{,}6º$; b) $W_{contra\text{-}campo} = -1{,}3 \cdot 10^{-11}$ J]

34) a) Deduzca la expresión de la energía potencial gravitatoria de una masa puntual en presencia de otra. b) Deduzca la expresión de la velocidad de escape de un cuerpo desde la superficie de un planeta esférico de masa M y radio R. c) Explique las características de la interacción gravitatoria entre dos masas puntuales. d) ¿Qué trabajo realiza la fuerza que actúa sobre una de las dos masas puntuales al describir media órbita circular de radio R alrededor de la otra? ¿Y si se desplazara desde esa distancia R hasta el infinito? Razone las respuestas.

35) Se desea lanzar un satélite de 500 kg desde la superficie terrestre para que describa una órbita circular de radio $r = 10 \cdot R_T$. a) ¿A qué velocidad debe lanzarse para que alcance dicha altura? Explique los cambios de energía que tienen lugar desde su lanzamiento hasta ese momento. b) ¿Cómo cambiaría la energía mecánica del satélite en órbita si el radio orbital fuera el doble?. Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2}; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg ; $R_T = 6.370$ km. [a) $v_{lanzamiento} = 10.907$ m/s; b) aumentaría en 782,7 MJ]

36) Un meteorito de 400 kg que se dirige en caída libre hacia la Tierra, tiene una velocidad de 20 m/s a una altura h = 500 km sobre la superficie terrestre. Determine razonadamente: a) el peso del meteorito a dicha altura; b) la velocidad con la que impactará sobre la superficie terrestre despreciando la fricción con la atmósfera. Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2}; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg ; $R_T = 6.370$ km. [a) 3.380 N; b) 3.937 m/s]

37) La masa de la Tierra es 81 veces la de la Luna y la distancia entre sus centros es $3{,}85 \cdot 10^5$ km. a) Calcula en qué punto, entre la Tierra y la Luna, se encontraría en equilibrio un meteorito de 200 kg; b) ¿cuál sería la energía potencial del meteorito en ese punto?. Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m^2/kg^2; $M_L = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg. [a) 345.600 km del centro de la Tierra; b) $-2{,}5553 \cdot 10^8$ J]

38) Un satélite artificial de 400 kg describe una órbita circular a una altura h sobre la superficie terrestre. El valor de la gravedad a dicha altura es la tercera parte de su valor en la superficie de la Tierra. a) Explique si hay que realizar trabajo para mantener el satélite en esa órbita y calcule el valor de h; b) determine el período de la órbita y la energía mecánica del satélite. Datos: $g = 9{,}8\ m/s^2$; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m. [a) h = 4.663,163 km; b) T = 3,2 h; $E_m = -7{,}2 \cdot 10^9$ J]

39) Desde la superficie terrestre se desea lanzar un satélite, de masa 100 kg, para que describa una órbita circular alrededor de la Tierra de radio $r = 5 \cdot R_T$. Calcule la energía cinética de lanzamiento para colocarlo en esa órbita y la velocidad de lanzamiento. Datos: $g_0 = 9{,}8\ m/s^2$; $R_T = 6.370$ km. [$E_{c(lanz)} = 5{,}618 \cdot 10^9$ J; $v_{lanz} = 10.600$ m/s]

Preguntas de teoría de interacción gravitatoria

1. Suponga que la Tierra redujese su radio a la mitad manteniendo su masa. a) ¿Aumentaría la intensidad del campo gravitatorio en su nueva superficie?. b) ¿Se modificaría sustancialmente su órbita alrededor del Sol?. Justifique las respuestas.

2. Demuestre, razonadamente, las siguientes afirmaciones: a) a una órbita de radio R de un satélite le corresponde una velocidad orbital v característica; b) la masa M de un planeta puede calcularse a partir de la masa m y del radio orbital R de uno de sus satélites.

3. Un satélite artificial describe una órbita circular alrededor de la Tierra. a) Explique qué se entiende por velocidad orbital y deduzca razonadamente su expresión. b) Conociendo el radio de la órbita y su período, ¿podemos determinar las masas de la Tierra y del satélite? Razone la respuesta

4. a) Haciendo uso de consideraciones energéticas, determine la velocidad mínima que habría que imprimirle a un objeto de masa m, situado en la superficie de un planeta de masa M y radio R, para que saliera de la influencia del campo gravitatorio del planeta. b) Se desea que un satélite se encuentre en una órbita geoestacionaria. ¿Con qué período de revolución y a qué altura debe hacerlo?

5. a) Enuncie la ley de gravitación universal y comente el significado físico de las magnitudes que intervienen en ella. b) Según la ley de gravitación universal, la fuerza que ejerce la Tierra sobre un cuerpo es proporcional a la masa de éste. ¿Por qué no caen más deprisa los cuerpos con mayor masa?

6. a) Explique qué se entiende por velocidad de escape y deduzca razonadamente su expresión. b) Si consideramos la presencia de la atmósfera, ¿qué ocurriría si lanzásemos un cohete desde la superficie de la Tierra con una velocidad igual a la velocidad de escape? Razone la respuesta.

7. Una partícula de masa m, situada en un punto A, se mueve en línea recta hacia otro punto B, en una región en la que existe un campo gravitatorio creado por una masa M. a) Si el valor del potencial gravitatorio en el punto B es mayor que en el punto A, razone si la partícula se acerca o se aleja de M. b) Explique las transformaciones energéticas de la partícula durante el desplazamiento indicado y escriba su expresión. ¿Qué cambios cabría esperar si la partícula fuera de A a B siguiendo una trayectoria no rectilínea?

8. a) La energía potencial de un cuerpo de masa m en el campo gravitatorio producido por otro cuerpo de masa m' depende de la distancia entre ambos. ¿Aumenta o disminuye dicha energía potencial al alejar los dos cuerpos? ¿Por qué?. b) ¿Qué mide la variación de energía potencial del cuerpo de masa m al desplazarse desde una posición A hasta otra B? Razone la respuesta.

9. a) ¿Qué se entiende por fuerza conservativa? Explique la relación entre fuerza y energía potencial. b) Sobre un cuerpo actúa una fuerza conservativa. ¿Cómo varía su energía potencial al desplazarse en la dirección y sentido de la fuerza? ¿Qué mide la variación de energía potencial del cuerpo al desplazarse desde un punto A hasta otro B? Razone las respuestas.

10. Razone la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones: a) El peso de un cuerpo en la superficie de un planeta cuya masa fuera la mitad que la de la Tierra sería la mitad de su peso en la superficie de la Tierra. b) El estado de "ingravidez" de los astronautas en el interior de las naves espaciales orbitando alrededor de la Tierra se debe a que la fuerza que ejerce la Tierra sobre ellos es nula.

11. Un satélite describe una órbita circular alrededor de la Tierra. Conteste razonadamente a las siguientes preguntas: a) ¿Qué trabajo realiza la fuerza de atracción hacia la Tierra a lo largo de media órbita?. b) Si la órbita fuera elíptica, ¿cuál sería el trabajo de esa fuerza a lo largo de una órbita completa?

12. a) Considere un punto situado a una determinada altura sobre la superficie terrestre. ¿Qué velocidad es mayor en ese punto, la orbital o la de escape?. b) A medida que aumenta la distancia de un cuerpo a la superficie de la Tierra disminuye la fuerza con que es atraído por ella. ¿Significa eso que también disminuye su energía potencial? Razone las respuestas.

13. Dibuje en un esquema las líneas de fuerza del campo gravitatorio creado por una masa puntual M. Sean A y B dos puntos situados en la misma línea de fuerza del campo, siendo B el punto más cercano a M. a) Si una masa, m, está situada en A y se traslada a B, ¿aumenta o disminuye su energía potencial? ¿Por qué?. b) Si una masa, m, está situada en A y se traslada a otro punto C, situado a la misma distancia de M que A, pero en otra línea de fuerza, ¿aumenta o disminuye la energía potencial? Razone su respuesta.

14. Dibuje en un esquema las líneas de fuerza del campo gravitatorio creado por una masa puntual M. Sean A y B dos puntos situados en la misma línea de fuerza del campo, siendo B el punto más cercano a M. a) Si una masa, m, está situada en A y se traslada a B, ¿aumenta o disminuye su energía potencial? ¿Por qué?. b) Si una masa, m, está situada en A y se traslada a otro punto C, situado a la misma distancia de M que A, pero en otra línea de fuerza, ¿aumenta o disminuye la energía potencial? Razone su respuesta.

15. Si por alguna causa la Tierra redujese su radio a la mitad manteniendo su masa, razone cómo se modificarían: a) La intensidad del campo gravitatorio en su superficie. b) Su órbita alrededor del Sol.

16. Razone si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones: a) Según la ley de la gravitación la fuerza que ejerce la Tierra sobre un cuerpo es directamente proporcional a la masa de éste. Sin embargo, dos cuerpos de diferente masa que se sueltan desde la misma altura llegan al suelo simultáneamente. b) El trabajo realizado por una fuerza conservativa en el desplazamiento de una partícula entre dos puntos es menor si la trayectoria seguida es el segmento que une dichos puntos.

17. Conteste razonadamente a las siguientes preguntas: a) Si se redujera el radio de la órbita lunar en torno a la Tierra, ¿aumentaría su velocidad orbital?. b) ¿Dónde es mayor la velocidad de escape, en la Tierra o en la Luna?

18. a) Enuncie las leyes de Kepler. b) Razone, a partir de la segunda ley de Kepler, cómo cambia la velocidad de un planeta a lo largo de su órbita al variar la distancia al Sol.

19. a) Enuncie las leyes de Kepler y razone si la velocidad de traslación de un planeta alrededor del Sol es la misma en cualquier punto de la órbita. b) Justifique si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: "la gravedad en la superficie de Venus es el 90% de la gravedad en la superficie de la Tierra y, en consecuencia, si midiésemos en Venus la constante de gravitación universal, G, el valor obtenido sería el 90% del medido en la Tierra".

20. a) Analice las características de la interacción gravitatoria entre dos masas puntuales. b) ¿Cómo se ve afectada la interacción gravitatoria descrita en el apartado anterior si en las proximidades de las dos masas se coloca una tercera masa, también puntual?. Haga un esquema de las fuerzas gravitatorias que actúan sobre la tercera masa.

21. a) Haciendo uso de consideraciones energéticas, deduzca la expresión de la velocidad mínima que habría que imprimirle a un objeto de masa m, situado en la superficie de un planeta de masa M y radio R, para que saliera de la influencia del campo gravitatorio del planeta. b) Se desea que un satélite se encuentre en una órbita geoestacionaria. Razone con qué período de revolución y a qué altura debe hacerlo.

22. a) Explique qué se entiende por velocidad orbital de un satélite y deduzca razonadamente su expresión para un satélite artificial que describe una órbita circular alrededor de la Tierra. b) ¿Se pueden determinar las masas de la Tierra y del satélite conociendo los datos de la órbita descrita por el satélite? Razone la respuesta.

23. a) Enuncie las leyes de Kepler. b) El radio orbital de un planeta es N veces mayor que el de la Tierra. Razone cuál es la relación entre sus períodos.

24. a) Explique qué se entiende por velocidad de escape y deduzca razonadamente su expresión. b) Razone qué energía habría que comunicar a un objeto de masa m, situado a una altura h sobre la superficie de la Tierra, para que se alejara indefinidamente de ella.

25. a) Enuncie las leyes de Kepler. b) Demuestre la tercera ley de Kepler a partir de la ley de gravitación universal de Newton para un órbita circular.

26. a) Indique las características de la interacción gravitatoria entre dos masas puntuales. b) Explique en qué punto, entre dos masas puntuales, puede encontrarse en equilibrio una tercera masa puntual y cuál sería su energía potencial.

27. a) Explique qué se entiende por velocidad orbital y deduzca su expresión para un satélite que describe una órbita circular alrededor de la Tierra. b) Razone cómo variaría la energía mecánica del satélite si se duplicara su masa.

28. a) Relación entre campo y potencial gravitatorios. b) Dibuje en un esquema las líneas del campo gravitatorio creado por una masa puntual M. Una masa m, situada en un punto A, se traslada hasta otro punto B, más próximo a M. Razone si aumenta o disminuye su energía potencial.

29. a) Escriba la ley de gravitación universal y explique las características de la interacción gravitatoria. b) Según la ley de gravitación, la fuerza que la Tierra ejerce sobre un cuerpo es proporcional a la masa de éste. Razone por qué no caen con mayor velocidad los cuerpos con mayor masa.

30. a) Energía potencial gravitatoria terrestre. b) Dos satélites idénticos giran alrededor de la Tierra en órbitas circulares de distinto radio. ¿Cuál de los dos se moverá a mayor velocidad? ¿Cuál de los dos tendrá mayor energía mecánica? Razone las respuestas.

31. a) Velocidad orbital de un satélite. b) Suponga que el radio de la Tierra se redujera a la mitad de su valor manteniéndose constante la masa terrestre. ¿Afectaría ese cambio al periodo de revolución de la Tierra alrededor del Sol? Razone la respuesta.

32. a) Explique las características de la interacción gravitatoria entre dos masas puntuales. b) ¿Qué trabajo realiza la fuerza que actúa sobre una de las dos masas puntuales al describir media órbita circular de radio R alrededor de la otra? ¿Y si se desplazara desde esa distancia R hasta el infinito?. Razone las respuestas.

33. a) Energía potencial gravitatoria de una masa puntual en presencia de otra. b) Deduzca la velocidad de escape de un cuerpo desde la superficie de un planeta esférico de masa M y radio R.

34. a) Explique el movimiento de un satélite en órbita circular en torno a la Tierra y deduzca la expresión de la velocidad orbital. b) Indique el significado de velocidad de escape y razone cómo cambia la velocidad de escape de un cuerpo si varía su altura sobre la superficie terrestre de $2 \cdot R_T$ a $3 \cdot R_T$.

35. a) Enuncie las leyes de Kepler. b) Razone, a partir de la segunda ley de Kepler y con la ayuda de un esquema, cómo cambia la velocidad de un planeta al describir su órbita elíptica en torno al Sol.

Contenidos

Campo gravitatorio. Campos de fuerza conservativos. Intensidad del campo gravitatorio. Potencial gravitatorio. Relación entre energía y movimiento orbital. Caos determinista.

Estándares de aprendizaje evaluables

1.1. Diferencia entre los conceptos de fuerza y campo, estableciendo una relación entre intensidad del campo gravitatorio y la aceleración de la gravedad.

1.2. Representa el campo gravitatorio mediante las líneas de campo y las superficies de energía equipotencial.

2.1. Explica el carácter conservativo del campo gravitatorio y determina el trabajo realizado por el campo a partir de las variaciones de energía potencial.

3.1. Calcula la velocidad de escape de un cuerpo aplicando el principio de conservación de la energía mecánica.

4.1. Aplica la ley de conservación de la energía al movimiento orbital de diferentes cuerpos como satélites, planetas y galaxias.

5.1. Deduce a partir de la ley fundamental de la dinámica la velocidad orbital de un cuerpo, y la relaciona con el radio de la órbita y la masa del cuerpo.

5.2. Identifica la hipótesis de la existencia de materia oscura a partir de los datos de rotación de galaxias y la masa del agujero negro central.

6.1. Utiliza aplicaciones virtuales interactivas para el estudio de satélites de órbita media (MEO), órbita baja (LEO) y de órbita geoestacionaria (GEO) extrayendo conclusiones.

7.1. Describe la dificultad de resolver el movimiento de tres cuerpos sometidos a la interacción gravitatoria mutua utilizando el concepto de caos.

Problemas de «Interacción Gravitatoria»

$G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ N\cdot m^2/kg^2$; $R_T = 6{,}37\cdot 10^6$ m; $M_T = 5{,}98\cdot 10^{24}$ kg; $g_{0(reposo)} = 9{,}83\ m/s^2 = G\cdot M_T/(R_T)^2$.

1) Calcula: a) la altura sobre la superficie terrestre a la que el valor de g se ha reducido a la mitad; b) el potencial gravitatorio terrestre en un punto situado a 6.370 km de distancia de la Tierra. [a) 2.638 km; b) U = $-3{,}12\cdot 10^7$ J/kg]

2) Una masa puntual de 8 kg está situada en el punto (0; 0). Calcular: a) punto del eje OY en el que habría que colocar otra masa puntual de 6 kg para que una partícula libre, de 2 kg, se encuentre en reposo en el punto (0;2) m; b) energía potencial gravitatoria de la partícula libre. [a) $(0;2+(3)^{½})$ m ; b) $-9{,}96\cdot 10^{-10}$ J]

3) Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba desde la superficie terrestre con una velocidad de 1.000 m/s. a) Calcular la altura máxima que alcanzará; b) repetir el cálculo despreciando la variación de g con la altura y comparar el resultado con el del apartado anterior. [a) 51.274,7 m ; b) 51.020,4 m]

4) Determine: a) la velocidad de escape de un cohete desde la superficie de la Tierra; b) la velocidad con la que debemos lanzar un proyectil desde la superficie de la Tierra, si queremos que a 400 km tenga una velocidad de 500 m/s. [a) 40.286 km/h = 11.191 m/s; b) 11.016,5 km/h = 3.060 m/s]

5) Calcula: a) el trabajo que hay que realizar para trasladar un cuerpo de 20 kg desde la superficie terrestre hasta una altura igual al radio de la Tierra; b) velocidad con que habría que lanzarlo para que alcanzara dicha altura. [a) $6{,}26\cdot10^8$ J; b) 28.487 km/h = 7.913 m/s]

6) Un satélite artificial describe una órbita circular a una altura igual a tres radios terrestres sobre la superficie de la Tierra. Calcula: a) la velocidad orbital del satélite; b) la aceleración del mismo. [a) 3.956,5 m/s = 14.243,5 km/h; b) 0,61 m/s^2]

7) Un satélite se encuentra girando en la órbita geoestacionaria ($T_{sideral}$ = 23:56:04 h = 86.164 s). Calcule el radio de la órbita y la velocidad del satélite. [r = 42.173,5 km; v_{orb} = 11.071 km/h]

8) Calcula la velocidad de escape para un cuerpo situado: a) en la superficie terrestre; b) a una altura de 2.000 km sobre dicha superficie. [a) 40.286 km/h; b) 35.145 km/h]

9) Un objeto que pesa 686 N, en la superficie de la Tierra, se encuentra en la superficie de un planeta cuyo radio es el doble del terrestre y cuya masa es 8 veces la de la Tierra. Calcule: a) el peso del objeto en dicho lugar; b) el tiempo de caída desde una altura de 20 m sobre la superficie del planeta. [a) 1.372 N; b) 1,430 s]

10) Determina el valor de la intensidad del campo gravitatorio en el punto medio del interior de la Tierra. Posteriormente, determina la velocidad con la que llegaría un objeto, de 10 kg, al centro de la Tierra; si cae por un agujero desde la superficie. [g_{int} = -4,9 m/s^2; 7.901 m/s].

11) Se desea situar un satélite artificial, de 50 kg de masa, en una órbita circular situada en el plano del ecuador y con un radio igual al doble del radio terrestre. Calcule: a) la energía que hay que comunicar al satélite; b) la velocidad orbital del mismo; c) la energía adicional que habría que aportar al satélite en órbita para que escape de la acción del campo gravitatorio terrestre; d) la velocidad de escape desde la órbita. [a) $2{,}35\cdot10^9$ J; b) 5.595 m/s = 20.143 km/h; b) $7{,}827\cdot10^8$ J; d) 7.913 m/s]

12) Se desea situar un satélite artificial, de 100 kg de masa, en una órbita circular situada en el plano del ecuador y con un radio igual a $2{,}5\cdot R_T$. Calcule: a) la energía que hay que comunicar al satélite b) la velocidad orbital del mismo; c) la energía adicional que habría que aportar al satélite en órbita para que escape de la acción del campo gravitatorio terrestre; d) la velocidad de escape desde la órbita. [a) $5{,}00\cdot10^9$ J; b) 5.004,65 m/s; c) $1{,}196\cdot10^9$ J; d) 7.077,65 m/s]

13) Un meteorito de 1.000 kg colisiona con otro, a una altura sobre la superficie terrestre de 6 veces el radio de la Tierra, y pierde toda su energía cinética. a) ¿Cuánto pesa el meteorito en ese punto y cuál es su energía mecánica tras la colisión?. b) Si cae a la Tierra, haga un análisis energético del proceso de caída. Calcule la energía cinética, la energía potencial gravitatoria y la velocidad con la que llega a la superficie de la Tierra. ¿Dependerá esa velocidad de la trayectoria seguida? Razone las respuestas. [a) P = 200 N; E_m = -$8{,}945\cdot10^9$ J; b) E_p = $-6.26\cdot10^{10}$ J; E_c = $5{,}367\cdot10^{10}$ J; v = 10.360 m/s]

14) A una altura de 500 km giran dos satélites de masa 1.000 kg, cada uno, describiendo la misma órbita circular, pero en sentido contrario, con lo que chocarán. Si la colisión es totalmente inelástica calcula: a) la energía mecánica inmediatamente después de la colisión; b) la velocidad con la que llegan al suelo si despreciamos el rozamiento con la atmósfera terrestre. Datos: $g_0 = 9{,}8$ m·s^{-2}; $R_T = 6{,}37\cdot10^6$ m. [a) $-1{,}16\cdot10^{11}$J; b) 3.022 m/s]

15) Un satélite, de 1.000 kg, está girando alrededor de la Tierra en una órbita circular a una altura de 350 km. a) ¿Cuál es la energía mecánica del satélite?. b) ¿Cuál es la energía que se ha gastado para colocarlo en dicha órbita?. Datos: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; $g_0 = 9{,}8$ ms^{-2}; R_T = 6.370 km. [a) $-2{,}96\cdot10^{10}$ J; b) $3{,}28\cdot10^{10}$ J]

16) Un cuerpo, inicialmente en reposo a una altura de 150 km sobre la superficie terrestre, se deja caer libremente. a) Explique cualitativamente cómo varían las energías cinética, potencial y mecánica del cuerpo durante el descenso, si se supone nula la resistencia del aire, y determine la velocidad del cuerpo cuando llega a la superficie terrestre. b) Si, en lugar de dejar caer el cuerpo, lo lanzamos verticalmente hacia arriba desde la posición inicial, ¿cuál sería su velocidad de escape?. Datos: G, R_T y M_T. [a) 1.694 m/s; b) 11.044 m/s]

17) Dos satélites idénticos A y B describen órbitas circulares de diferente radio ($R_A > R_B$) alrededor de la Tierra. Conteste razonadamente a las siguientes preguntas: a) ¿cuál de los dos tiene mayor energía cinética?; b) si los dos satélites estuviesen en la misma órbita ($R_A = R_B$) y tuviesen distinta masa ($m_A < m_B$), ¿cuál de los dos se movería con mayor velocidad?, ¿cuál de ellos tendría más energía cinética?. [a) El B; b) con la misma velocidad; el B tiene la energía cinética mayor.]

18) a) Explique la influencia que tienen la masa y el radio de un planeta en la aceleración de la gravedad en su superficie y en la energía potencial de una partícula próxima a dicha superficie. b) Imagine que la Tierra aumentara su radio al doble y su masa al cuádruple, ¿cuál sería el nuevo valor de g?, y ¿el nuevo período de la Luna?. Datos: G, R_T, M_T, la distancia Tierra-Luna es $3{,}8\cdot10^5$ km. [a) $g = GM/R^2$; $E_p = mgh = m(GM/R^2)h$; b) el valor de g sería el mismo y el período de la Luna sería la mitad.]

19) Analice las siguientes proposiciones, razonando si son verdaderas o falsas: a) el trabajo realizado por una fuerza sobre un cuerpo es igual a la variación de su energía cinética; b) la energía cinética necesaria para escapar de la Tierra depende de la elección del origen de energía potencial.

20) Razone las respuestas a las siguientes preguntas: a) si el cero de energía potencial gravitatoria de una partícula de masa m se sitúa en la superficie de la Tierra, ¿cuál es el valor de la energía de la partícula cuando se encuentra a una distancia infinita de la Tierra?; b) ¿puede ser negativo el trabajo realizado por una fuerza gravitatoria?; ¿puede ser negativa la energía potencial gravitatoria?. [a) GMm/R_T; b) el trabajo es negativo si el desplazamiento es de sentido contrario a la fuerza, la energía potencial gravitatoria es siempre negativa ya que es cero en el infinito.]

21) Un satélite artificial de 1.000 kg gira alrededor de la Tierra en una órbita circular de 7.650 km de radio, a 1.280 km de altura. Calcule: a) los cambios que ha experimentado el satélite, desde su lanzamiento de un punto del ecuador de la Tierra, en la energía cinética, la energía potencial y la energía mecánica; b) el trabajo que se ha tenido que realizar para colocarlo en esa órbita; c) la aceleración de la gravedad en esa órbita así como el peso del satélite. Datos: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ $N\cdot m^2/kg^2$; $R_T = 6{,}37\cdot10^6$ m; $M_T = 5{,}98\cdot10^{24}$ kg. [a) $\Delta E_c = 2{,}60\cdot10^{10}$ J; $\Delta E_{p(g)} = 1{,}048\cdot10^{10}$ J; $\Delta E_m = 3{,}643\cdot10^{10}$ J; b) $W = 3{,}643\cdot10^{10}$ J; c) $g = 6{,}81$ m/s^2; 0]

22) Un satélite artificial en órbita geoestacionaria es aquél que, al girar con la misma velocidad angular de rotación que la Tierra, se mantiene sobre la misma vertical. a) Explique las características de esa órbita y calcule su altura respecto a la superficie de la Tierra; b) Razone qué valores obtendrá para la masa y el peso de un cuerpo situado en dicho satélite sabiendo que su masa en la Tierra es de 20 kg. Datos: G, R_T; M_T.[a) Órbita alrededor de la Tierra en el plano ecuatorial para tener el mismo eje de rotación que la Tierra y a una altura de 35.837,6 km; b) la masa es la misma, 20 kg, pero el peso es cero.]

23) La aceleración de caída libre en un punto de la superficie de la Tierra depende de la latitud y del período de rotación de la Tierra. Demuestre: a) si la aceleración de caída libre sobre el ecuador sería mayor, menor o igual si el período de rotación de la Tierra disminuyese a 16 horas; b) lo mismo pero sobre el polo norte. [a) Ecuador: $g_{rotando(T=24h)} = 9{,}780$ m/s^2 $> g_{rotando(T=16h)} = 9{,}738$ m/s^2; b) polo norte: $g_{rotando(T=24h)} = g_{rotando(T=16h)}$]

24) Considere un satélite de 100 kg situado sobre un punto del ecuador en la superficie de la Tierra. Calcule: a) la velocidad del satélite en la superficie de la Tierra; b) la energía mecánica del satélite en el punto del ecuador sobre la superficie de la Tierra; c) la energía mecánica que tendrá el satélite cuando gire en una órbita a 400 km sobre la superficie de la Tierra; d) el trabajo que hay que realizar para trasladar el satélite desde la superficie de la Tierra hasta la órbita en la que está girando a 400 km sobre la superficie de la

Tierra. Datos: $G = 6,67\cdot 10^{-11}$ N·m²/kg²; $R_T = 6,37\cdot 10^{6}$ m; $M_T = 5,98\cdot 10^{24}$ kg. [a) 463 m/s; b) $-6,25\cdot 10^{9}$ J ; c) $-2,95\cdot 10^{9}$ J; d) $3,3\cdot 10^{9}$ J]

25) Considere un satélite artificial, de masa 50 kg, en órbita geoestacionaria. Determine: a) el radio de la órbita y la velocidad del satélite; b) el cambio en la energía del satélite al pasar de la órbita geoestacionaria a la órbita de la estación orbital terrestre, a 400 km sobre la superficie de la Tierra. Datos: $G = 6,67\cdot 10^{-11}$ N·m²/kg²; $R_T = 6,37\cdot 10^{6}$ m; $M_T = 5,98\cdot 10^{24}$ kg. [a) 42.250 km; b) $-1,234\cdot 10^{9}$ J]

26) Suponga que la masa terrestre se duplicara. a) Calcule razonadamente el nuevo período orbital de la Luna suponiendo que su radio orbital permaneciera constante. b) Si, además de duplicarse la masa terrestre, se duplicara su radio, ¿cuál sería el valor de g en la superficie terrestre?. Datos: $G = 6,67\cdot 10^{-11}$ N·m²/kg²; $R_T = 6,37\cdot 10^{6}$ m; $M_T = 5,98\cdot 10^{24}$ kg; $R_{orbita\text{-}Luna} = 3,84\cdot 10^{8}$ m. [a) $T/2^{½}$; b) $g_0/2$]

27) Sean las cuatro masas: $m_1 = 1$ kg en el punto (0;0), $m_2 = 2$ kg en el punto (0;1) m, $m_3 = 3$ kg en el punto (1;1) m y $m_4 = 4$ kg en el punto (1;0) m. Calcule: a) la fuerza, módulo y dirección, ejercida sobre la masa m_1 por las otras tres masas; b) la intensidad del campo gravitatorio ejercida sobre la masa m_1 por las otras tres masas; c) la energía potencial del sistema formado por las cuatro masas; d) el trabajo que hay que realizar sobre el sistema, contra la fuerza gravitatoria, para separar las cuatro masas hasta el infinito. Dato: $G = 6,67\cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻². [a) $F_{1(total)} = 3,9448\cdot 10^{-10}$ N a 31,165º; b) $3,945\cdot 10^{-10}$ m/s² a 31,165º; c) $-2,11\cdot 10^{-9}$ J; c) $2,11\cdot 10^{-9}$ J]

28) a) Un satélite artificial describe una órbita circular en torno a la Tierra. ¿Qué trabajo realiza la fuerza con la que la Tierra atrae al satélite, durante una órbita?. Justifique la respuesta.

29) La masa del planeta Júpiter es, aproximadamente, 300 veces la de la Tierra, su diámetro 10 veces mayor que el terrestre y su distancia media al Sol 5 veces mayor que la de la Tierra al Sol. a) Razone cuál sería el peso en Júpiter de un astronauta de 75 kg. b) Calcule el tiempo que Júpiter tarda en dar una vuelta completa alrededor del Sol, expresado en años terrestres. Datos: $g = 9,8$ m/s²; radio orbital terrestre alrededor del Sol es de $1,5\cdot 10^{11}$ m. [a) 2.203 N; b) $11,18\cdot T_{Tierra}$]

30) a) Analice las características de la interacción gravitatoria entre dos masas puntuales. b) ¿Cómo se ve afectada la interacción gravitatoria descrita en el apartado anterior si en las proximidades de las dos masas se coloca una tercera masa, también puntual?. Haga un esquema de las fuerzas gravitatorias que actúan sobre la tercera masa.

31) Sean las cuatro masas: $m_1 = 1$ kg en el punto (0;0), $m_2 = 2$ kg en el punto (1;0) m, $m_3 = 3$ kg en el punto (0;1) m y $m_4 = 4$ kg en el punto (-1;0) m. Calcule: a) la fuerza ejercida sobre la masa m_1 por las otras tres masas; b) la energía potencial del sistema formado por las cuatro masas; c) el trabajo que hay que realizar sobre el sistema, contra la fuerza gravitatoria, para separar las cuatro masas hasta el infinito. Dato: $G = 6,67\cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻². [a) $2,40\cdot 10^{-10}$ N a 123,7º; b) $-1,7\cdot 10^{-9}$ J]

32) La velocidad de escape de un satélite, lanzado desde la superficie de la Luna, es de 2.370 m/s. a) Explique el significado de la velocidad de escape y calcule el radio de la Luna. b) Determine la intensidad del campo gravitatorio lunar en un punto de su superficie. Datos: $G = 6,67\cdot 10^{-11}$ N·m²/kg²; $M_{Luna} = 7,4\cdot 10^{22}$ kg. [a) $R_L = 1,76\cdot 10^{6}$ m; b) $g_{Luna} = 1,60$ m/s²]

33) Dos masas puntuales $m_1 = 10$ kg y $m_2 = 5$ kg están situadas en los puntos $P_1(0,3)$ m y $P_2(4,0)$ m, respectivamente. a) Dibuje el campo gravitatorio producido por cada una de las masas en el punto A(0,0) m y en el punto B(4,3) m y calcule el campo gravitatorio total en ambos puntos. b) Determine el trabajo necesario para desplazar una partícula de 0,5 kg desde el punto B hasta el A. Discuta el signo de este trabajo y razone si su valor depende de la trayectoria seguida. $G = 6,67\cdot 10^{-11}$ N·m²/kg². [a) $g_A = 7,7\cdot 10^{-11}$ m/s²; $\theta_A = 15,7$º; $g_B = 5,58\cdot 10^{-11}$ m/s²; $\theta_B = 221,6$º; b) $W_{contra\text{-}campo} = -1,3\cdot 10^{-11}$ J]

34) a) Deduzca la expresión de la energía potencial gravitatoria de una masa puntual en presencia de otra. b) Deduzca la expresión de la velocidad de escape de un cuerpo desde la superficie de un planeta esférico de masa M y radio R. c) Explique las características de la interacción gravitatoria entre dos masas puntuales. d) ¿Qué trabajo realiza la fuerza que actúa sobre una de las dos masas puntuales al describir media órbita circular de radio R alrededor de la otra? ¿Y si se desplazara desde esa distancia R hasta el infinito? Razone las respuestas.

35) Se desea lanzar un satélite de 500 kg desde la superficie terrestre para que describa una órbita circular de radio $r = 10 \cdot R_T$. a) ¿A qué velocidad debe lanzarse para que alcance dicha altura? Explique los cambios de energía que tienen lugar desde su lanzamiento hasta ese momento. b) ¿Cómo cambiaría la energía mecánica del satélite en órbita si el radio orbital fuera el doble?. Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg ; $R_T = 6.370$ km. [a) $v_{lanzamiento} = 10.907$ m/s; b) aumentaría en 782,7 MJ]

36) Un meteorito de 400 kg que se dirige en caída libre hacia la Tierra, tiene una velocidad de 20 m/s a una altura h = 500 km sobre la superficie terrestre. Determine razonadamente: a) el peso del meteorito a dicha altura; b) la velocidad con la que impactará sobre la superficie terrestre despreciando la fricción con la atmósfera. Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg ; $R_T = 6.370$ km. [a) 3.380 N; b) 3.937 m/s]

37) La masa de la Tierra es 81 veces la de la Luna y la distancia entre sus centros es $3{,}85 \cdot 10^5$ km. a) Calcula en qué punto, entre la Tierra y la Luna, se encontraría en equilibrio un meteorito de 200 kg; b) ¿cuál sería la energía potencial del meteorito en ese punto?. Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $N \cdot m^2/kg^2$; $M_L = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg. [a) 345.600 km del centro de la Tierra; b) $-2{,}5553 \cdot 10^8$ J]

38) Un satélite artificial de 400 kg describe una órbita circular a una altura h sobre la superficie terrestre. El valor de la gravedad a dicha altura es la tercera parte de su valor en la superficie de la Tierra. a) Explique si hay que realizar trabajo para mantener el satélite en esa órbita y calcule el valor de h; b) determine el período de la órbita y la energía mecánica del satélite. Datos: $g = 9{,}8$ m/s^2; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m. [a) h = 4.663,163 km; b) T = 3,2 h; $E_m = -7{,}2 \cdot 10^9$ J]

39) Desde la superficie terrestre se desea lanzar un satélite, de masa 100 kg, para que describa una órbita circular alrededor de la Tierra de radio $r = 5 \cdot R_T$. Calcule la energía cinética de lanzamiento para colocarlo en esa órbita y la velocidad de lanzamiento. Datos: $g_0 = 9{,}8$ m/s^2; $R_T = 6.370$ km. [$E_{c(lanz)} = 5{,}618 \cdot 10^9$ J; $v_{lanz} = 10.600$ m/s]

Preguntas de teoría de interacción gravitatoria

1. Suponga que la Tierra redujese su radio a la mitad manteniendo su masa. a) ¿Aumentaría la intensidad del campo gravitatorio en su nueva superficie?. b) ¿Se modificaría sustancialmente su órbita alrededor del Sol?. Justifique las respuestas.

2. Demuestre, razonadamente, las siguientes afirmaciones: a) a una órbita de radio R de un satélite le corresponde una velocidad orbital v característica; b) la masa M de un planeta puede calcularse a partir de la masa m y del radio orbital R de uno de sus satélites.

3. Un satélite artificial describe una órbita circular alrededor de la Tierra. a) Explique qué se entiende por velocidad orbital y deduzca razonadamente su expresión. b) Conociendo el radio de la órbita y su período, ¿podemos determinar las masas de la Tierra y del satélite? Razone la respuesta

4. a) Haciendo uso de consideraciones energéticas, determine la velocidad mínima que habría que imprimirle a un objeto de masa m, situado en la superficie de un planeta de masa M y radio R, para que saliera de la influencia del campo gravitatorio del planeta. b) Se desea que un satélite se encuentre en una órbita geoestacionaria. ¿Con qué período de revolución y a qué altura debe hacerlo?

5. a) Enuncie la ley de gravitación universal y comente el significado físico de las magnitudes que intervienen en ella. b) Según la ley de gravitación universal, la fuerza que ejerce la Tierra sobre un cuerpo es proporcional a la masa de éste. ¿Por qué no caen más deprisa los cuerpos con mayor masa?

6. a) Explique qué se entiende por velocidad de escape y deduzca razonadamente su expresión. b) Si consideramos la presencia de la atmósfera, ¿qué ocurriría si lanzásemos un cohete desde la superficie de la Tierra con una velocidad igual a la velocidad de escape? Razone la respuesta.

7. Una partícula de masa m, situada en un punto A, se mueve en línea recta hacia otro punto B, en una región en la que existe un campo gravitatorio creado por una masa M. a) Si el valor del potencial gravitatorio en el punto B es mayor que en el punto A, razone si la partícula se acerca o se aleja de M. b) Explique las transformaciones energéticas de la partícula durante el desplazamiento indicado y escriba su expresión. ¿Qué cambios cabría esperar si la partícula fuera de A a B siguiendo una trayectoria no rectilínea?

8. a) La energía potencial de un cuerpo de masa m en el campo gravitatorio producido por otro cuerpo de masa m' depende de la distancia entre ambos. ¿Aumenta o disminuye dicha energía potencial al alejar los dos cuerpos? ¿Por qué?. b) ¿Qué mide la variación de energía potencial del cuerpo de masa m al desplazarse desde una posición A hasta otra B? Razone la respuesta.

9. a) ¿Qué se entiende por fuerza conservativa? Explique la relación entre fuerza y energía potencial. b) Sobre un cuerpo actúa una fuerza conservativa. ¿Cómo varía su energía potencial al desplazarse en la dirección y sentido de la fuerza? ¿Qué mide la variación de energía potencial del cuerpo al desplazarse desde un punto A hasta otro B? Razone las respuestas.

10. Razone la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones: a) El peso de un cuerpo en la superficie de un planeta cuya masa fuera la mitad que la de la Tierra sería la mitad de su peso en la superficie de la Tierra. b) El estado de "ingravidez" de los astronautas en el interior de las naves espaciales orbitando alrededor de la Tierra se debe a que la fuerza que ejerce la Tierra sobre ellos es nula.

11. Un satélite describe una órbita circular alrededor de la Tierra. Conteste razonadamente a las siguientes preguntas: a) ¿Qué trabajo realiza la fuerza de atracción hacia la Tierra a lo largo de media órbita?. b) Si la órbita fuera elíptica, ¿cuál sería el trabajo de esa fuerza a lo largo de una órbita completa?

12. a) Considere un punto situado a una determinada altura sobre la superficie terrestre. ¿Qué velocidad es mayor en ese punto, la orbital o la de escape?. b) A medida que aumenta la distancia de un cuerpo a la superficie de la Tierra disminuye la fuerza con que es atraído por ella. ¿Significa eso que también disminuye su energía potencial? Razone las respuestas.

13. Dibuje en un esquema las líneas de fuerza del campo gravitatorio creado por una masa puntual M. Sean A y B dos puntos situados en la misma línea de fuerza del campo, siendo B el punto más cercano a M. a) Si una masa, m, está situada en A y se traslada a B, ¿aumenta o disminuye su energía potencial? ¿Por qué?. b) Si una masa, m, está situada en A y se traslada a otro punto C, situado a la misma distancia de M que A, pero en otra línea de fuerza, ¿aumenta o disminuye la energía potencial? Razone su respuesta.

14. Dibuje en un esquema las líneas de fuerza del campo gravitatorio creado por una masa puntual M. Sean A y B dos puntos situados en la misma línea de fuerza del campo, siendo B el punto más cercano a M. a) Si una masa, m, está situada en A y se traslada a B, ¿aumenta o disminuye su energía potencial? ¿Por qué?. b) Si una masa, m, está situada en A y se traslada a otro punto C, situado a la misma distancia de M que A, pero en otra línea de fuerza, ¿aumenta o disminuye la energía potencial? Razone su respuesta.

15. Si por alguna causa la Tierra redujese su radio a la mitad manteniendo su masa, razone cómo se modificarían: a) La intensidad del campo gravitatorio en su superficie. b) Su órbita alrededor del Sol.

16. Razone si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones: a) Según la ley de la gravitación la fuerza que ejerce la Tierra sobre un cuerpo es directamente proporcional a la masa de éste. Sin embargo, dos cuerpos de diferente masa que se sueltan desde la misma altura llegan al suelo simultáneamente. b) El trabajo realizado por una fuerza conservativa en el desplazamiento de una partícula entre dos puntos es menor si la trayectoria seguida es el segmento que une dichos puntos.

17. Conteste razonadamente a las siguientes preguntas: a) Si se redujera el radio de la órbita lunar en torno a la Tierra, ¿aumentaría su velocidad orbital?. b) ¿Dónde es mayor la velocidad de escape, en la Tierra o en la Luna?

18. a) Enuncie las leyes de Kepler. b) Razone, a partir de la segunda ley de Kepler, cómo cambia la velocidad de un planeta a lo largo de su órbita al variar la distancia al Sol.

19. a) Enuncie las leyes de Kepler y razone si la velocidad de traslación de un planeta alrededor del Sol es la misma en cualquier punto de la órbita. b) Justifique si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: "la gravedad en la superficie de Venus es el 90% de la gravedad en la superficie de la Tierra y, en consecuencia, si midiésemos en Venus la constante de gravitación universal, G, el valor obtenido sería el 90% del medido en la Tierra".

20. a) Analice las características de la interacción gravitatoria entre dos masas puntuales. b) ¿Cómo se ve afectada la interacción gravitatoria descrita en el apartado anterior si en las proximidades de las dos masas se coloca una tercera masa, también puntual?. Haga un esquema de las fuerzas gravitatorias que actúan sobre la tercera masa.

21. a) Haciendo uso de consideraciones energéticas, deduzca la expresión de la velocidad mínima que habría que imprimirle a un objeto de masa m, situado en la superficie de un planeta de masa M y radio R, para que saliera de la influencia del campo gravitatorio del planeta. b) Se desea que un satélite se encuentre en una órbita geoestacionaria. Razone con qué período de revolución y a qué altura debe hacerlo.

22. a) Explique qué se entiende por velocidad orbital de un satélite y deduzca razonadamente su expresión para un satélite artificial que describe una órbita circular alrededor de la Tierra. b) ¿Se pueden determinar las masas de la Tierra y del satélite conociendo los datos de la órbita descrita por el satélite? Razone la respuesta.

23. a) Enuncie las leyes de Kepler. b) El radio orbital de un planeta es N veces mayor que el de la Tierra. Razone cuál es la relación entre sus períodos.

24. a) Explique qué se entiende por velocidad de escape y deduzca razonadamente su expresión. b) Razone qué energía habría que comunicar a un objeto de masa m, situado a una altura h sobre la superficie de la Tierra, para que se alejara indefinidamente de ella.

25. a) Enuncie las leyes de Kepler. b) Demuestre la tercera ley de Kepler a partir de la ley de gravitación universal de Newton para un órbita circular.

26. a) Indique las características de la interacción gravitatoria entre dos masas puntuales. b) Explique en qué punto, entre dos masas puntuales, puede encontrarse en equilibrio una tercera masa puntual y cuál sería su energía potencial.

27. a) Explique qué se entiende por velocidad orbital y deduzca su expresión para un satélite que describe una órbita circular alrededor de la Tierra. b) Razone cómo variaría la energía mecánica del satélite si se duplicara su masa.

28. a) Relación entre campo y potencial gravitatorios. b) Dibuje en un esquema las líneas del campo gravitatorio creado por una masa puntual M. Una masa m, situada en un punto A, se traslada hasta otro punto B, más próximo a M. Razone si aumenta o disminuye su energía potencial.

29. a) Escriba la ley de gravitación universal y explique las características de la interacción gravitatoria. b) Según la ley de gravitación, la fuerza que la Tierra ejerce sobre un cuerpo es proporcional a la masa de éste. Razone por qué no caen con mayor velocidad los cuerpos con mayor masa.

30. a) Energía potencial gravitatoria terrestre. b) Dos satélites idénticos giran alrededor de la Tierra en órbitas circulares de distinto radio. ¿Cuál de los dos se moverá a mayor velocidad? ¿Cuál de los dos tendrá mayor energía mecánica? Razone las respuestas.

31. a) Velocidad orbital de un satélite. b) Suponga que el radio de la Tierra se redujera a la mitad de su valor manteniéndose constante la masa terrestre. ¿Afectaría ese cambio al periodo de revolución de la Tierra alrededor del Sol? Razone la respuesta.

32. a) Explique las características de la interacción gravitatoria entre dos masas puntuales. b) ¿Qué trabajo realiza la fuerza que actúa sobre una de las dos masas puntuales al describir media órbita circular de radio R alrededor de la otra? ¿Y si se desplazara desde esa distancia R hasta el infinito?. Razone las respuestas.

33. a) Energía potencial gravitatoria de una masa puntual en presencia de otra. b) Deduzca la velocidad de escape de un cuerpo desde la superficie de un planeta esférico de masa M y radio R.

34. a) Explique el movimiento de un satélite en órbita circular en torno a la Tierra y deduzca la expresión de la velocidad orbital. b) Indique el significado de velocidad de escape y razone cómo cambia la velocidad de escape de un cuerpo si varía su altura sobre la superficie terrestre de $2 \cdot R_T$ a $3 \cdot R_T$.

35. a) Enuncie las leyes de Kepler. b) Razone, a partir de la segunda ley de Kepler y con la ayuda de un esquema, cómo cambia la velocidad de un planeta al describir su órbita elíptica en torno al Sol.